1. Publicação nº: *INPE-2498-PRE/181*

2. Versão:

3. Data: *Ago., 1982*

5. Distribuição: ☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita

4. Origem: *DIN/DPI* — Programa: *IMAGE*

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)

PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS — MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO — FILTRAGEM DIGITAL

7. C.D.U.: *621.376.5*

8. Título: *INPE-2498-PRE/181*

PROJETO DE INTERPOLADORES EM IMAGENS DIGITAIS POR MEIO DE MÉTODOS DE JANELAMENTO

10. Páginas: *62*

11. Última página: *53*

12. Revisada por

Ubirajara M. B. Lima

9. Autoria: *Gilberto Câmara Neto*, *Nelson Delfino D'Avila Mascarenhas*, *Celso Luiz Mendes*

Assinatura responsável

13. Autorizada por

Nelson de Jesus Parada
Diretor

14. Resumo/Notas

O processo de interpolação é familiar para quem já teve ocasião de "ler por entre as linhas" de uma tabela de funções matemáticas: estimam-se os valores de um evento contínuo a partir de amostras discretas. O uso de interpoladores é frequente em processamento digital de imagens, tendo-se em vista a correção de distorções espaciais ou os aumentos de escala. Neste sentido, pode-se pensar no processo de interpolação como sendo a mudança da taxa de amostragem de uma imagem digital; o enfoque do problema é feito do ponto de vista da teoria de processamento digital de sinais, em ves de uma abordagem de análise numérica. Como consequência do teorema de amostragem, sabe-se que para a reconstrução de um sinal sem perda de informação dever-se-ia ter - idealmente-um interpolador de infinitos coeficientes: a função senx/x; poder-se - á obter uma resposta finita multiplicando-se a resposta ideal por uma sequência finita de pesos, chamada janela. O presente trabalho apresenta uma nova classe de interpoladores, formados pelo produto da função senx/x - interpolador ideal-com as várias janelas existentes na literatura. Apresentam-se resultados da aplicação desses métodos ao problema de ampliação de escala, medindo--se os parâmetros de erro de cada imagem ampliada; é feita ainda avaliação no domínio da frequência, através da comparação do espectro resultante com o espectro do interpolador ideal.

15. Observações: *Trabalho submetido para apresentação na 34ª Reunião Anual da SBPC, 06 a 14 de julho de 1982, Campinas, São Paulo.*

ABSTRACT

The process of interpolation is familiar to anyone who has had occasion to "read between the lines" of a table of mathematical functions: the values of a continuous process are estimated from discrete samples. Interpolation is used extensibely in digital signal processing to magnify images and to correct spatial distortions. In this context, interpolation may be thought of as a process for changing the sampling rate; this approach to the problem of interpolation is made from the point of view of digital signal processing rather than from a numerical analysis view point. From sampling theory, it is known that for reconstruction with no loss of information the ideal interpolator-the sinc function-would have infinite duration; a finite response may be obtained, multiplying the ideal interpolator by a finite weighting sequence known as a window. A number of windows have been proposed in the literature, and the following work presents a new class of interpolators, obtained by the use of various windows. These interpolators were used in wxperiments od scale magnification; the results are shown, and the error parameters are presented for each magnified image.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1- O PROBLEMA DE INTERPOLAÇÃO EM IMAGENS DIGITAIS

Entre as técnicas matemáticas mais frequentemente utilizadas no tratamento digital de imagens está o processo de interpolação. Neste contexto seu uso é extensivo e inclui problemas de reamostragem, correção geométrica e ampliação de escala. Nas aplicações que requerem interpolação, os valores de um processo contínuo devem ser obtidos a partir de amostras discretas; além de processamento de imagens, podem ser citados sistemas de processamento de fala e multiplexação em frequência como exemplos de problemas onde é necessária a interpolação.

Dada a sua importância, é imprescindível compreender bem o processo de interpolação. No caso de imagens digitais, por exemplo, a grande quantidade de dados presente faz com que seja essencial o desenvolvimento de algoritmos eficientes - resultantes de um compromisso entre *qualidade de interpolação* e *tempo de computação*. Para tanto, é preciso analisar o processo de interpolação, com o intuito de projetar algoritmos que satisfaçam os requisitos necessários.

No caso de imagens multiespectrais, como as geradas pelos sensores MSS do satélite LANDSAT[1], as imagens possuem distorção geométrica e os pontos (elementos de imagens) não estão distribuídos de uma maneira regular no espaço (cada ponto na imagem corresponde a um retângulo de 57 x 79 metros). Muitas vezes é desejável obter os da

[1] *Para uma descrição do sensor do LANDSAT, veja-se o artigo de Bernstein (1976).*

dos LANDSAT numa grade regular - de tamanho 50 x 50 metros, por exemplo - e, para tanto, é necessário interpolar valores entre as amostras originais. Este procedimento é chamado *reamostragem*.

Nas aplicações de *correção geométrica*, uma grade de pontos da imagem corrigida é mapeada para a imagem original - que possui distorções geométricas - por meio de um par de polinômios de duas variáveis. As funções de mapeamento utilizadas são de forma (Bernstein, 1976):

$$v = v(x, y) = \sum_{p=0}^{N}{}' \sum_{q=0}^{N-p}{}' a_{pq} \, x^p \, y^q,$$

$$u = u(x, y) = \sum_{p=0}^{N}{}' \sum_{q=0}^{N-p}{}' b_{pq} \, x^p \, y^q,$$

onde (x, y) é um ponto na imagem corrigida e (u, v) um ponto de imagem original (distorcida). A grade de pontos mapeada deve ser suficientemente fina para permitir a localização - com precisão adequada - de todos os pontos da imagem corrigida, com relação à imagem original; este processo é denominado *mapeamento inverso*. Após determinar a posição do ponto da imagem resultante na imagem original, o valor da *intensidade* deste ponto é *interpolado*.

Como foi visto, tanto o procedimento de *reamostragem* como o de *correção geométrica* necessitam de métodos de interpolação. Entre os métodos de interpolação mais corriqueiros, podem ser citados (Bernstein, 1976) :

- <u>Vizinho-mais-próximo</u>, onde a intensidade do elemento da imagem de entrada mais próximo é selecionada, e este valor é atribuído ao ponto de imagem corrigida.

- Interpolação bilinear, que utiliza quatro pontos da vizinhança de imagem de entrada para computar a intensidade dos pontos da imagem resultante. A técnica utilizada é interpolação linear bidimensional (daí a origem do nome bilinear).

- Convolução cúbica, que leva em conta os dezesseis valores na imagem original mais próximos do ponto resultante; a função de interpolação é uma aproximação de 3ª ordem para um interpolador do tipo x/x, o qual - conforme será visto mais adiante - é a função teórica ideal para reamostragem. Este método produz melhores resultados, ao custo de um tempo de computação maior.

Dada a importância do processo de interpolação no tratamento de imagens multiespectrais, com o objetivo de melhor conhecer este processo, a intenção deste trabalho é analisar *uma classe de interpoladores*; tais funções são obtidas por meio dos métodos de projeto de filtros digitais, disponíveis na literatura de Processamento Digital de Sinais. O comportamento dessa classe de interpoladores foi comparada com aqueles mais frequentemente utilizados, com o intuito de estabelecer *limites práticos* de desempenho e fornecer *subsídios* para a escolha de funções de interpolação adequadas a uma determinada aplicação.

O emprego das técnicas de Processamento Digital de Sinais merece um comentário: é mais comum o projeto de interpoladores a partir de um ponto de vista de Análise Numérica. A abordagem de Processamento Digital de Sinais evidencia - a partir uma interpretação no domínio da frequência - que *interpolação* é basicamente um processo de *filtragem linear*. Além disso, num problema típico desta área, são implementados sistemas com um comportamento de entrada/saída especificado; este enfoque é particularmente útil no projeto de interpoladores e permite uma avaliação mais fundamentada de seu comportamento. Além disso, trabalhos anteriores (Mendes et alii, 1982) evidenciaram as vantagens da primeira abordagem em comparação com a segunda.

A análise do processo de interpolação do ponto de vista de *filtragem linear* mostra grande fecundidade: existe uma variedade de técnicas de projeto de filtros, que representam diferentes compromissos em função da flexibilidade de projeto, do efeito do tamanho finito da palavra, da complexibilidade em termos do tempo de computação, e do comportamento em frequência do filtro. No Capítulo 2 é apresentada uma discussão sucinta das consequências da abordagem de Processamento Digital de Imagens ao problema, que leva em conta as *vantagens* e *desvantagens* do emprego de filtros de Resposta ao Impuldo Finita - -ditos "FIR" (não-recursivos)-e filtros de Resposta ao Impulso Infinita-ditos "IIR" (recursivos) - para o projeto de interpoladores, sendo evidenciada a superioridade dos primeiros. Como consequência, no Capítulo 3, o projeto de filtros para interpolação por meio de técnicas de projeto de filtros FIR é discutido: é empregado o método de *janelamento*. No Capítulo 4, são apresentados resultados relativos aos problemas de ampliação de escala e reamostragem de imagens LANDSAT; são também relatadas algumas conclusões no tocante aos interpoladores projetados, tendo em vista futuras aplicações.

Uma observação importante acerca do âmbito deste trabalho diz respeito à natureza dos interpoladores. Embora os interpoladores em imagens sejam - por natureza - bidimensionais, o enfoque escolhido supõe a separabilidade destas funções, o que transforma sua análise num problema unidimensional.

CAPÍTULO 2

INTERPOLAÇÃO EM IMAGENS: UMA ABORDAGEM DE PROCESSAMENTO DE SINAIS

2.1 - ANÁLISE EM FREQUÊNCIA

Em muitos problemas de processamento digital de sinais, dada uma sequência x[n], que corresponde a um período amostral T, é desejada uma sequência y[n], tal que $y[n] = \hat{x}_a(nT')$; a sequência y[n] é o resultado da amostragem de $\hat{x}_a(t)$ - função analógica original - numa taxa diferente. Para que a nova sequência y[n] seja obtida sem erro, uma análise detalhada desse processo será feita. Para tanto, algumas definições e teoremas são necessários.

- DEFINIÇÃO 2.1 - Uma função $\hat{x}_a(t)$ é dita *limitada em faixa* se sua transformada de Fourier é zero fora de um intervalo finito, ou seja:

$$\hat{X}_a(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \Omega, \tag{2.1}$$

e sua energia E é finita:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |F(\omega)|^2 \, d\omega < \infty. \tag{2.2}$$

A condição de limitação em faixa, além de corresponder a suposições realistas sobre as propriedades naturais dos sistemas, conduz a relações muito convenientes em Processamento Digital de Sinais; por exemplo, permite a determinação inequívoca de um sinal $\hat{x}_a(t)$ a partir de suas amostras, como mostra o teorema seguinte.

- TEOREMA 2.1-(Nyquist) Uma função $\hat{x}_a(t)$, limitada em faixa na frequência Ω, pode ser expressa em termos de suas amostras x[nT], a partir da fórmula:

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT] \; \frac{\text{sen}\,\Omega(t-nT)}{\Omega(t-nT)}, \tag{2.3}$$

$$\text{onde } T = \frac{\pi}{\Omega} \; . \tag{2.4}$$

A prova do Teorema 2.1 pode ser encontrada em qualquer livro de Análise de Sinais (p.ex., Papoulis, 1977).

Como consequência, ao computar a Equação 2.3 para t=nT', é obtida uma relação direta entre y[n] e n[n]. A Equação 2.1, contudo, é impossível de ser avaliada, pois as funções:

$$\frac{\text{sen}\ \ (t-nT)}{(t-nT)}$$

têm duração infinita; em lugar de simplemente truncar estas funções, é mais razoável projetar interpoladores de duração finita. Além disso, a reconstrução dada pela Equação 2.3 representa a convolução - no domínio do tempo - com a função *Sinc*. No domínio de frequência, isto correspondecia à multiplicação da resposta em frequência X(ω) por um filtro passa-baixas ideal-não realizável fisicamente. Para entender como estes interpoladores podem ser projetados, é apresentada a seguir a representaçao, no domínio da frequência, dos processos que modificam a taxa de amostragem, de acordo com a linha de Schafer e Rabiner (1973) e Crochiere e Rabiner (1981).

Com o aumento da taxa de amostragem por um fator inteiro L - o que corresponde a uma interpolação de L vezes - o novo período de amostragem será T' = T/L.

Como a sequência x[n] fornece amostras da sequência desejada apenas em intervalos de L amostras na nova razão de amostragem, as amostras subsequentes devem ser preenchidas por interpolação. Para melhor compreender o processo, a relacão entre *sistemas contínuos* e suas *amostras discretas*, no domínio de frequência, é considerada a seguir.

Para um sinal $x_a(t)$ com transformada Fourier $\hat{X}_a(\omega)$, limitado em faixa na frequência Ω, vale o seguinte teorema:

- TEOREMA 2.2 - Para as amostras $x[nT]$ tomadas no período amostral $T = \frac{\pi}{\Omega}$, a resposta em frequência correspondente $X(e^{j\omega T})$ está relacionada de maneira direta com a resposta em frequência $\hat{X}(\omega)$ do sinal analógico $x_a(t)$, a saber:

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \hat{X}(\omega), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T}. \tag{2.5}$$

A prova do Teorema 2.2 pode ser encontrada no livro de Rabiner e Gold (1975); tal teorema está ilustrado na Figura 2.1.

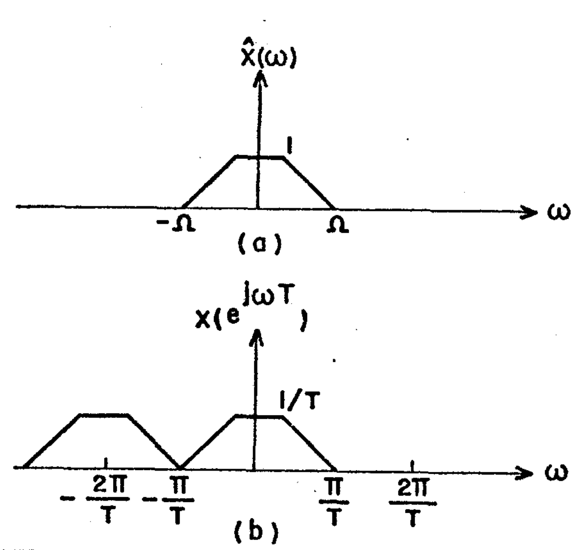


Fig. 2.1 - Relação entre as transformadas de Fourier de um sinal contínuo e de sequência discreta, obtida por amostragem com período.

FONTE: Schafer and Rabiner (1973).

Para o aumento de taxa de amostragem, a sequência $v[n]$ é inicialmente obtida a partir das amostras originais:

$$v[n] = x[n/L] \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \tag{2.6}$$
$$= 0, \quad \text{fora.}$$

A sequência v[n] corresponde a preencher com zeros as amostras a serem interpoladas, o que reserva a informação original.

- TEOREMA 2.3 - A resposta em frequência $V(e^{j\omega T'})$, ou seja, $V(e^{j\omega T})$ é periódica com período $\frac{2\pi}{T}$, e não $\frac{2\pi}{T'}$, como seria de esperar.

PROVA. A transformada em z de v[n] será:

$$V(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n/L]\, z^{-n}, \tag{2.7}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-Ln} = X(z^L). \tag{2.8}$$

Como $z = e^{j\omega T'}$ e $T'L = T$ segue-se que:

$$V(e^{j\omega T'}) = X(e^{j\omega T'L}), \tag{2.9}$$

ou seja:

$$V(e^{j\omega T'}) = X(e^{j\omega T}). \tag{2.10}$$

A Figura 2.2a mostra $V(e^{j\omega T'})$ e $X(e^{j\omega T})$ para o caso $T' = \frac{T}{3}$.

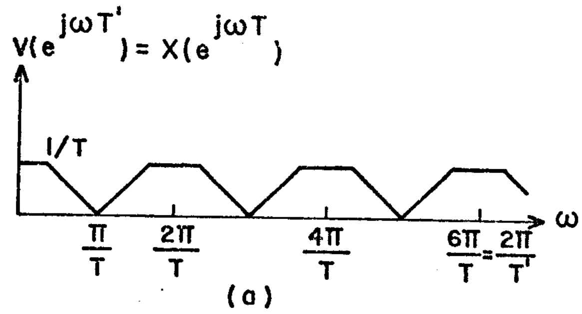
Para computar a sequência $y[n] = \hat{x}\,(nT')$ a partir de sequência v[n], deve ser garantido que:

$$Y(e^{j\omega T'}) = \frac{1}{T'}\, X_a(\omega) \;.\; |\omega| \leq \frac{\pi}{T'}. \tag{2.11}$$

Deste modo, as condições do Teorema 2.2 são satisfeitas e a reconstrução é feita sem erro. Para a obtenção do sinal interpolado, com a informação de que:

$$V(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}\, X_a(\omega),\; |\omega| < \frac{\pi}{T}, \tag{2.12}$$

todas as frequências no intervalo $\frac{\pi}{T} < |\omega| < \frac{\pi}{T'}$ devem ser rejeitadas por meio de um filtro passa-baixas, como ilustra a Figura 2.2b. Além disso, para garantir que a amplitude esteja correta no intervalo de amostragem T', o ganho do filtro deve ser $L = \frac{T}{T'}$.



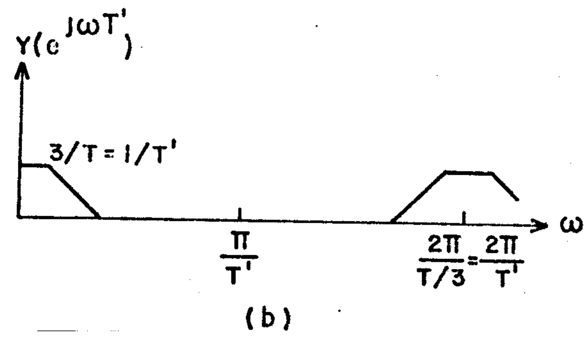


Fig. 2.2 - Aumento de taxa de amostragem.

(a) - Transformada de Fourier das sequências x [n] e v[n].

(b) - Transformada de Fourier da saída desejada y [n]

FONTE: Schafer and Rabiner (1973).

Assim, é necessário que:

$$Y(e^{j\omega T'}) = H(e^{j\omega T'})\, V(e^{j\omega T'}) = H(e^{j\omega T'}) = X(e^{j\omega T'}), =$$

$$= H(e^{j\omega T'})\, \frac{1}{T}\, X_a(\omega), \quad |\omega| < \frac{\pi}{T'} . \qquad (2.13)$$

Para satisfazer a Equação 2.11, basta que o filtro seja expresso por:

$$H(e^{j\omega T'}) = L = \frac{T}{T'} \qquad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \qquad (2.14)$$

$$= 0, \qquad \frac{\pi}{T} \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{T'}.$$

O *intervalo ideal* para aumento da taxa de amostragem de um valor L requer, deste modo, a criação de uma frequência de L-1 zeros entre cada valor da sequência original, que será então filtrada por um filtro passa-baixas ideal.

O resultado anterior é uma consequência direta do Teorema de Amostragem: a *reconstrução sem erro* é possível apenas para sinais com *conteúdo em frequência limitado*. Cabe aqui uma observação para o caso de mudança de taxa de amostragem por fatores não-inteiros: o procedimento inicial inclui aumentar a taxa de amostragem por um fator L (interpolação), e a filtragem como passo seguinte. O resultado terá sua taxa de amostragem reduzida de um fator M (decimação). O processo é ilustrado na Figura 2.3.

Fig. 2.3 - Representação em diagrama de blocos do aumento da taxa de amostragem por um fator de L/M.

O processo de *decimação* é dual àquele de interpolação, sendo discutido com maior detalhe em Schafer e Rabiner (1973). Para uma escolha conveniente de L e M, é possível chegar arbitrariamente perto de qualquer razão desejada para mudança da taxa de amostragem.

2.2 - ESCOLHA DE FILTROS PARA INTERPOLAÇÃO

Na discussão anterior, foi mostrado que o processo de interpolação é redutível a um problema de filtragem linear. Como o filtro de reconstrução ideal não é realizável fisicamente, existem diversas aproximações que representam diferentes compromissos entre acurácia de interpolação e eficiência de realização. Uma consideração básica na escolha dos filtros diz respeito ao tipo de realização: podem ser utilizados filtros IIR (recursivos) e filtros FIR (não-recursivos). Nesta seção, são apresentados argumentos no sentido da superioridade dos filtros FIR, no tocante ao problema de interpolação.

- Distorção em Fase

Uma característica importante dos filtros FIR é que eles podem ser projetados com fase exatamente linear; tal característica é relevante, pois o interpolador ideal tem fase zero. Assim, no caso de filtros FIR para interpolação, a distorção devido à não-linearidade em fase pode ser imposta igual a zero. No caso de filtros IIR, isto não é possível, pois tais filtros não podem ter fase linear com exatidão; neste caso, existirá sempre um erro de interpolação - mesmo que a resposta em amplitude tenha um comportamento muito próximo do desejado - divido à não-linearidade em fase.

- Realização do Filtro

De uma maneira geral, os filtros IIR têm realizações mais eficientes que os filtros FIR; contudo, a natureza do processo de interpolação faz com que os FIR sejam competivos com os IIR em termos de tempo de computação.

Como já discutido anteriormente, a interpolação ideal seria obtida a partir das amostras originais x[n] por:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{n=\infty}^{\infty} \tilde{h}\,[n-k]\;u\,[k], \tag{2.15}$$

onde $\tilde{h}[n]$ representa a resposta impulsiva do interpolador ideal (função *sinc*).

No caso de um filtro FIR com resposta ao impulso h[n], tal que:

$$h[n] = 0 \qquad |n| > \frac{n-1}{2}, \tag{2.16}$$

a saída do processo será denotada por:

$$h[n] = \sum_{K=n-N-1/2}^{K=n+N-1/2} h[n-K] \; v[K], \tag{2.17}$$

onde v[n] representa a sequência x[n] "preenchida com zeros", conforme descrito anteriormente:

$$\begin{aligned} V[n] &= x[n/L] \qquad && n = 0 \;\; \pm L \;\; \pm 2L \\ &= 0 && \text{fora.} \end{aligned}$$

Embora o esforço computacional aparente seja proporcional a N, o teorema seguinte indica que pode ser conseguida uma redução.

<u>TEOREMA 2.4</u> - A complexidade da interpolação por convolução (denotada na Equação 2.17) é proporcional a N/L, onde N é o número de elementos do filtro FIR e L o aumento da taxa de amostragem.

<u>PROVA</u> - A sequência v[n] é substituida por sua correspondente na sequência original, conforme a Equação 2.17.

$$y[n] = \sum_{K=n-N-1/2}^{n+N-1/2} x[K/L] \; h[n-K] \;, \quad \frac{K}{L} \in I. \tag{2.18}$$

Apenas um em cada L valores da sequência x[n] é utilizado na interpolação, pois as outras L - 1 amostras são nulas. A Equação 2.18 pode - à luz destas restrições - ser reescrita como:

$$y[n] = \sum_{K = \lfloor n/L - N - 1/2L \rfloor}^{\lfloor n/L + N - 1/2L \rfloor} x[k]\, h[n - KL]^{1}. \qquad (2.19)$$

A Equação 2.19 torna claro que o esforço computacional é proporcional a N/L no caso de filtros não-recursivos (FIR), o que acaba a prova.

Se fossem utilizados filtros IIR, muito pouca economia poderia ser feita, o que indica um melhor comportamento em amplitude dos filtros IIR é compensado pela realização por convolução dos filtros FIR.

- Restrições na Resposta ao Impulso

Uma outra restrição importante no projeto de interpolador - possível no caso de filtro FIR e difícil de impor em projeto de filtros IIR - é a de que os valores das amostras de entrada sejam recuperados, nos tempos de amostragem originais. Ou seja, para $\underline{r} \in I$, a restrição é expressa por:

$$y[\mathbf{r}L] = x[\mathbf{r}L/L] = x[\mathbf{r}] \quad - \infty < r < \infty. \qquad (2.20)$$

Da Equação 2.19 vem:

$$y[\mathbf{r}L] = x[r] = x[r] = \sum_{K = \lfloor r - N - 1/2L \rfloor}^{\lfloor r + N - 1/2L \rfloor} x[K]\, h[rL - KL] \qquad (2.21)$$

---

[1] *A notação $\lfloor x \rfloor$ refere-se ao "maior interiro menor que x"*

A Equação 2.21 indica que o filtro interpolador h[n] deve ser tal que:

$$h[0] = 1,$$

$$h[n] = 0, \qquad n = \pm 2L \ldots \left\lfloor \frac{N-1}{2L} \right\rfloor \qquad (2.22)$$

As restrições à resposta ao impulso indicadas na Equação 2.22 podem ser incorporadas ao projeto de filtro FIR (Rabiner and Gold, 1975); o projeto de filtros IIR, entretanto, é usualmente expresso por uma função racional em H(z), pois a resposta ao impulso de tais filtros é infinita. Deste modo, tais condicionantes dificilmente poderiam ser incorporados ao projeto de filtros IIR.

Os argumentos acima apresentaram razões ponderáveis no sentido da escolha de filtros FIR, em detrimento de filtros IIR, pra resolver o problema da interpolação. Foi mostrado também que os filtros desejados devem ser passa - baixas e ter fase linear. Neste particular, existem na literatura um conjunto de métodos disponíveis para obter tais filtros; no que se segue, é feita uma discussão do projeto de filtros FIR segundo o método de *janelamento*.

CAPÍTULO 3

USO DE JANELAS PARA PROJETO DE INTERPOLADORES

3.1- TEORIA DE JANELAS

O método mais simples para projeto de filtros digitais FIR é o método de *janelamento*; tal método advém do uso de técnicas da série de Fourier ao problema de obter uma resposta em frequência desejada.

A resposta em frequência desejada $\tilde{H}\,(e^{j\omega})$ de um filtro 1-D digital possui expansão em série de Fourier (a resposta é periódica no domínio de frequência), denotada por:

$$\tilde{H}\,(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}(n)\, e^{-j\omega n}, \tag{3.1}$$

onde:

$$\tilde{h}(n) = \frac{1}{2\pi} \int^{2\pi} \tilde{H}\,(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega. \tag{3.2}$$

Os coeficientes da série de Fourier são facilmente reconhecíveis como sendo equivalentes à resposta ao impulso de um filtro digital. Contudo, a resposta ao impulso deste filtro teria duração infinita, visto que a somatória na Equação 3.1 vai de $-\infty$ a $+\infty$; o filtro resultante é, então, irrealizável. É imperativo - deste modo - truncar a série de Fourier obtida de alguma maneira. Infelizmente, o truncamento dá origem ao fenômeno de *Gibbs*: a resposta em frequência obtida *oscila* perto das descontinuidades.

O fenômeno de Gibbs pode ser facilmente compreendido por meio do teorema de convolução; o truncamento da série de Fourier corresponde à sua multiplicação com uma função definida como:

$$t_N(n) = \begin{cases} 1 - (\frac{N-1}{2}) \leq n \leq (\frac{N-1}{2}), \\ 0 \quad \text{fora}, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde N é o tamanho do filtro. Tal janela teria uma resposta em frequência do tipo:

$$T_N(e^{j\omega}) = \frac{\text{sen } (N\omega/2)}{\text{sen } (\omega)} . \tag{3.4}$$

A resposta em frequência do filtro truncado pode ser obtida por convolução da resposta em frequência desejada $\tilde{H}$ $(e^{j\omega})$ com T_N $(e^{j\omega})$. Próximo às descontinuidades de $\tilde{H}$ $(e^{j\omega})$ haverá oscilações e "overshoots" na resposta em frequência projetada **H** $(e^{j\omega})$. Tais "overshoots" não decrescem com o aumento do tamanho da resposta em frequência (Rabiner and Gold, 1975). Deste modo, o *truncamento* puro e simples é bastante ineficiente.

Uma solução mais viável para obter filtros realizáveis a partir da expansão em série de Fourier é através do chamado *janelamento*: uma sequência finita de pesos j(n), chamada *janela*, é utilizada para modificar os coeficientes de Fourier $\tilde{h}(n)$. Assim, a sequência $h(n) = \tilde{h}(n) \cdot j(n)$ é formada, e o filtro pode ser implementado eficientemente. A Figura 3.1 ilustra o processo de *janelamento*.

Como a resposta em frequência resultante **H** $(e^{j\omega})$ é o resultado da convolução das respostas em frequência do filtro desejado $\tilde{H}$ $(e^{j\omega})$ e da janela J $(e^{j\omega})$, é oportuno fazer aqui considerações semelhantes às anteriores. Em particular, a largura das faixas de transição depende da largura do lobo principal de J $(e^{j\omega})$; além disso, oscilações resultantes dos lobos secundários de **J** $(e^{j\omega})$ produzem erros de aproximação em H $(e^{j\omega})$, para todo ω. Deste modo as características desejáveis para uma janela são:

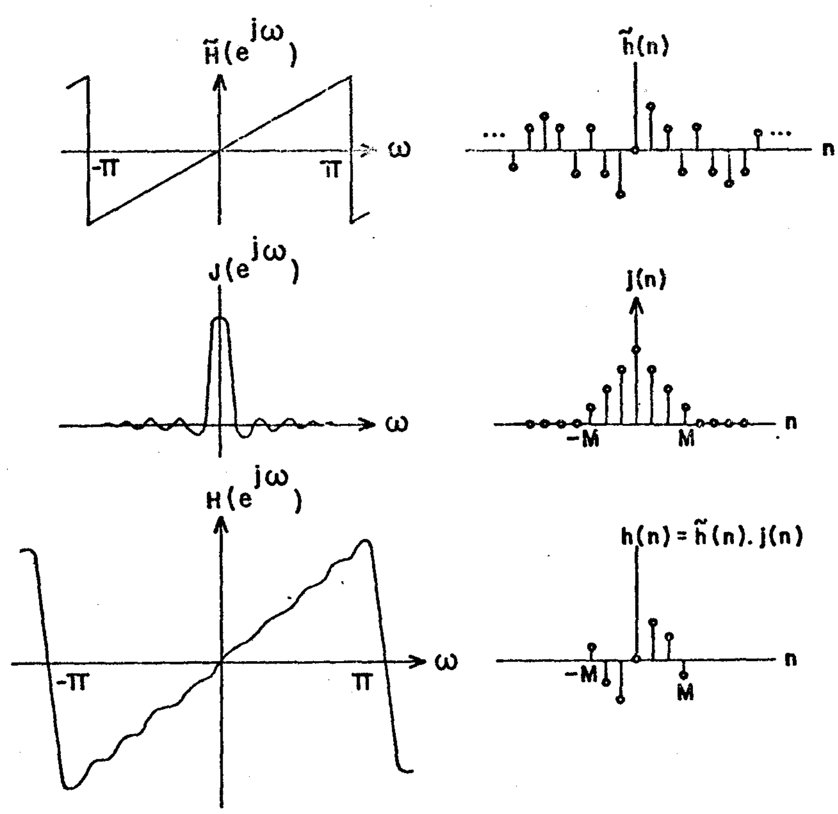


Fig. 3.1 - Ilustração do processo de janelamento.
FONTE: Rabiner and Gold (1975).

1) Pequena largura do lobo principal de resposta em frequência, com tanta energia quanto possível.

2) Lobos laterais da resposta em frequência com rápido decaimento, quando ω tende a π.

Estes requisitos não são compatíveis e um compromisso é necessário, dando origem a diferentes janelas, com distintas propriedades.

A seguir, é feita uma apresentação de um conjunto de janelas - disponíveis na literatura - utilizando-as no projeto de interpoladores. Deste modo uma nova *classe de interpoladores* é gerada.

3.2 - CLASSE DE INTERPOLADORES POR JANELAS

A teoria de janelas tem origem no problema de estimação espectral: o objetivo é estimar a transformada de Fourier $F(\omega)$ de um sinal $f(t)$ a partir de seu truncamento $f_T(t)$. Neste caso, são utilizadas *janelas* (Papoulis, 1977 e Blackman and Tukey, 1958) para reduzir o erro de estimação.

No caso de projeto de interpoladores, a intenção é obter uma resposta em frequência que aproxima o interpolador ideal $\tilde{H}(e^{j\omega})$, cuja resposta em frequência é denotada pela função *sinc* $\tilde{h}(n)$. Como já visto anteriormente, o truncamento do interpolador ideal daria origem a características indesejáveis - fato verificado experimentalmente por Mendes et alii (1982). O uso de janelas procura remediar tal problema, pois são obtidas funções de interpolação que aproximam, em frequência, um filtro passa-baixas; no domínio do espaço, isso equivale a tomar o filtro interpolador resultante do produto:

$$h(K) = \tilde{h}(K)\, j(K), \quad -\frac{(N-1)}{2} \leq K \leq \frac{N-1}{2}, \qquad (3.5)$$

onde j(K) representa o K-ésimo coeficiente da janela, e N, o tamanho do filtro.

No que se segue, várias janelas são apresentadas, com algumas propriedades de interesse evidenciadas.

(i) Janela de Hann.

$$j(K) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi K}{N-1}\right)\right], K = -\frac{N-1}{2}, \ldots, \frac{N-1}{2}. \tag{3.6}$$

(ii) Janela de Hamming.

$$j(K) = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi K}{N-1}\right), K = -\frac{N-1}{2}, \ldots, \frac{N-1}{2}. \tag{3.7}$$

(iii) Janela de Blackman.

$$j(K) = 0.42 + 0.50 \cos\left(\frac{2\pi K}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi K}{N-1}\right), \quad K = -\frac{N-1}{2}, \ldots, \frac{N-1}{2}. \tag{3.8}$$

As janelas acima foram inicialmente utilizadas para análise espectral de periodogramas (Capelini et alii, 1978). A partir destas janelas foram propostas ainda: a janela de *Tukey*, combinação da janela *retangular* com a Hann, e a janela de *3-coeficientes* (para maiores detalhes, ver Geckinli and Yavuz, 1978).

(iv) Janela de Tukey.

$$
j(K) = \begin{cases} 1 < |K| < N_1 \text{ onde } N_1 < \dfrac{N-1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\left[\dfrac{\dfrac{2\pi}{N-1}(n-N_1)}{1-\dfrac{2N_1}{N-1}}\right], N_1 < |K| < \dfrac{N-1}{2}. \\[2ex] 0, \quad \text{fora}. \end{cases} \tag{3.9}
$$

(v) Janela de 3-coeficientes.

$0 \leqslant \beta \leqslant 0.045$

$$
\begin{cases} \dfrac{1-4\beta}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{2\pi K}{N-1}\right) + 2\beta\cos\left(\dfrac{4\pi K}{N-1}\right), \; K = -\left(\dfrac{N-1}{2}\right), \ldots \dfrac{N-1}{2}, \\[2ex] 0, \quad \text{fora}. \end{cases} \tag{3.10}
$$

A janela de 3-coeficientes é redutível às janelas de Hann e Blackman, com $\beta=0$ e $\beta=0.04$, respectivamente. Algumas outras janelas apresentam propriedades de interesse, a saber:

(vi) Janela de Kaiser.

$0 \leqslant \beta \leqslant 10$

$$j(K)=\begin{cases}\dfrac{Io\left(\beta\sqrt{1-(2K/(N-1)^{2}}\right)}{Io\,(\beta)}, & K=-\dfrac{N-1}{2},\ldots,\dfrac{N-1}{2},\\[2ex] 0, & \text{fora},\end{cases} \tag{3.11}$$

onde Io (x) é a função de Bessel modificada de ordem zero; o parâmetro β controla o compromisso entre a energia do lobo principal e o pico dos lobos secundários. A janela de Kaiser foi proposta para aproximação das funções de onda esferoidais *prolatas*; tais funções possuem *máxima concentração de energia* e minimizam a energia fora de um intervalo especificado. Para tais funções, a razão

$$\frac{\int_{-\omega_1}^{\omega_1} |J(\omega)|^2 \, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |J(\omega)|^2 \, d\omega} \tag{3.12}$$

é máxima.

A janela de Kaiser não cai a zero para $|K| = \frac{N-1}{2}$; para melhorar seu comportamento, Geckinli e Yavuz (1978) propuseram a assim chamada *janela de Kaiser modificada*: seu valor para $|K| = \frac{N-1}{2}$ é feito igual a zero.

(vii) Janela de Kaiser Modificada.

$1 \leq \beta \leq 10$

$$j(K) = \begin{cases}\dfrac{Io\left[\beta\sqrt{1-[2K/(N-1)]^{2}}\right]-1}{Io\,(\beta)-1} & K = -\dfrac{N-1}{2},\ldots\dfrac{N-1}{2}\\[2ex] 0, & \text{fora.}\end{cases} \tag{3.13}$$

A janela que possui *mínimo momento de amplitude*, e minimiza a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \, J(\omega) \, d\omega, \tag{3.14}$$

sujeito às restrições e

$$\begin{aligned} J(\omega) &= J(\omega), \\ J^*(\omega) &= J(\omega), \\ J(\omega) &\geq 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

foi deduzida por Papoulis (1977) e leva seu nome.

(viii) Janela de Papoulis.

$$j(K) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \left| \text{sen} \dfrac{2\ K}{N-1} \right| + \left(1 - \dfrac{2|K|}{N-1}\right) \cos \dfrac{2\pi K}{N-1}, & K = -\dfrac{N-1}{2}, \ldots \dfrac{N-1}{2}, \\ 0, & \text{fora}. \end{cases} \tag{3.16}$$

A janela *cossenoidal* possui *mínimo momento de energia*, ou seja, torna mínima a equação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \, J^2(\omega) \, d\omega. \tag{3.17}$$

(ix) Janela Cossenoidal.

$$J(K) = \begin{cases} \cos \left(\dfrac{\pi K}{N-1}\right), & K = -\dfrac{N-1}{2}, \ldots, \dfrac{N-1}{2}, \\ 0, & \text{fora}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Outra abordagem para a proposição de janelas tem origem no problema de *convergência* da *série de Fourier* associada ao projeto do filtro: a convergência da série é apressada multiplicando-a por coeficientes adequados, procedimento equivalente a usar uma janela. O método de somatória de Fejer dá origem à *janela triangular* (também chamada *janela de Bartlett*) e o método de Lanczos, à *janela sinc*; além disso, Parzen (conforme Papoulis, 1977) propôs ainda uma janela que é o resultado da autoconvolução da *janela triangular*.

(x) Janela Triangular (ou de Bartlett).

$$j(K) = \begin{cases} 1 - \left|\dfrac{2K}{N-1}\right|, & K = -\dfrac{N-1}{2}, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{fora}. \end{cases} \tag{3.19}$$

(xi) Janela de Parzen.

$$j(K) = \begin{cases} 1-24 \left|\dfrac{K}{N-1}\right|^2 \left(1-2\left|\dfrac{K}{N-1}\right|\right), & |K| < \dfrac{N-1}{4} \\ 2\left(1-2\left|\dfrac{K}{N-1}\right|\right)^3, & \dfrac{N-1}{4} \leq K < \dfrac{N-1}{2} \\ 0 & \text{fora}. \end{cases} \tag{3.20}$$

(xii) Janela Sinc.

$$j(K) = \begin{cases} \left[\dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi K}{N-1}\right)}{\dfrac{2\pi K}{N-1}} \right]^L, & K = -\dfrac{N-1}{2}, \ldots, \dfrac{N-1}{2}, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases} \tag{3.21}$$

onde L é inteiro (L>0).

A janela *sinc* com L=1 maximiza (Geckinli and Yavuz, 1978) a área sob o lobo principal no intervalo $|\omega| \leq 2\pi$, ou seja, a integral

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} J(\omega)\, d\omega, \tag{3.22}$$

sujeita às restrições de:

$$\begin{cases} J(t) \geq 0, \\ J(-\omega) = J(\omega), \\ J^*(\omega) = J(\omega). \end{cases} \tag{3.23}$$

Por último, será examinado um tipo de janela proposto em função do problema de interpolação. Shlien (1979) observa que o interpolador ideal, $\frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x}$, pode ser representado pelo produto infinito:

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\ldots \tag{3.24}$$

O truncamento para $|x| > n$ introduz descontinuidades em $|x| = n$ o que causa uma oscilação pronunciada nas características espectrais do interpolador. Com base nessas considerações, Shlien (1979) propôs a seguinte *janela:*

(xiii) Janela de Shlien

$$j(K) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{2K}{N-1}\right)^2, & K = \dfrac{-N-1}{2}, \ldots, \dfrac{N-1}{2} \\ 0, & \text{fora.} \end{cases} \quad (3.25)$$

Esta janela tem a propriedade de possuir as derivadas iguais a zero para $|K| = N-1/2$, o que corresponde a remover as descontinuidade de primeira ordem, geradas pelo truncamento.

Para posterior comparação, deve ser aqui citado o interpolador por *convolução cúbica*, normalmente utilizado para reamostragem e correção geométrica (Bernstein, 1976). Este interpolador é obtido através de polinômios de 3ª ordem, definidos no intervalo de interesse; tais polinômios aproximam o comportamento do interpolador ideal, com derivadas contínuas nos pontos onde o interpolador seja igual a zero.

(xiv) Convolução Cúbica.

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} - \left|\dfrac{2K}{N-1}\right|^3 - \dfrac{5}{2}\left|\dfrac{4K}{N-1}\right|^2 + 1 & 0 < |K| < \dfrac{N-1}{4} \\ -\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{4K}{N-1}\right|^3 + \dfrac{5}{2}\left|\dfrac{4K}{N-1}\right|^2 - 4\left|\dfrac{4K}{N-1}\right| + 2 & \dfrac{N-1}{4} \leq |K| \leq \dfrac{N-1}{2} \\ 0, \text{ fora.} \end{cases} \quad (3.26)$$

A aplicação de cada uma das janelas apresentadas ao projeto de interpoladores - de acordo com a Equação 3.5 - dá origem a um interpolador distinto; as Figuras 3.2 a 3.17 apresentam os gráficos dos diferentes interpoladores, além do módulo de sua resposta em frequência. Note-se que os interpoladores *vizinho-mais-próximo, bilinear e convolução cúbica* foram incluídos para permitir comparações.

Na seção seguinte, são apresentados alguns parâmetros que permitem o cotejo entre os interpoladores.

3.2 - COMPARAÇÃO ENTRE INTERPOLADORES: ERRO DE RESOLUÇÃO E ERRO DE INTERPOLAÇÃO

As funções discutidas até agora são próprias do problema de projeto de filtros unidimensionais; no caso de imagens, no entanto, o aumento de fimensionalidade resulta numa maior complecisade. Além disso, o trabalho no domínio do tempo é substituído pelo emprego de medidas do espaço. Assim, as novas unidades amostrais correspodem aos pontos ("pixels") da imagem digitalizada, e a unidade de frequência passa a ser o "ciclo/pexel".

A representação usual considera uma imagem ideal contínua, de dimensões infinitas, cuja intensidade pode ser denotada por $F_I(x,y)$. A imagem real - digitalizada e finita - pode ser considerada produto de imagem ideal, $F_I(x, y)$, por uma grade de pulsos finita, $S(s, y)$, o que dá origem à imagem amostrada, $F_p(x, y)$, como se segue:

$$F_p(x, y) = F_I(x, y)\, S(x, y), \tag{3.27}$$

onde $S(x, y)$ é dado por:

$$S(x, y) = \sum_{j_1=N_1}^{N_1} \sum_{j_2=N_2}^{N_2} P(x - j_1\, \Delta x,\, y - j_2\, \Delta y). \tag{3.28}$$

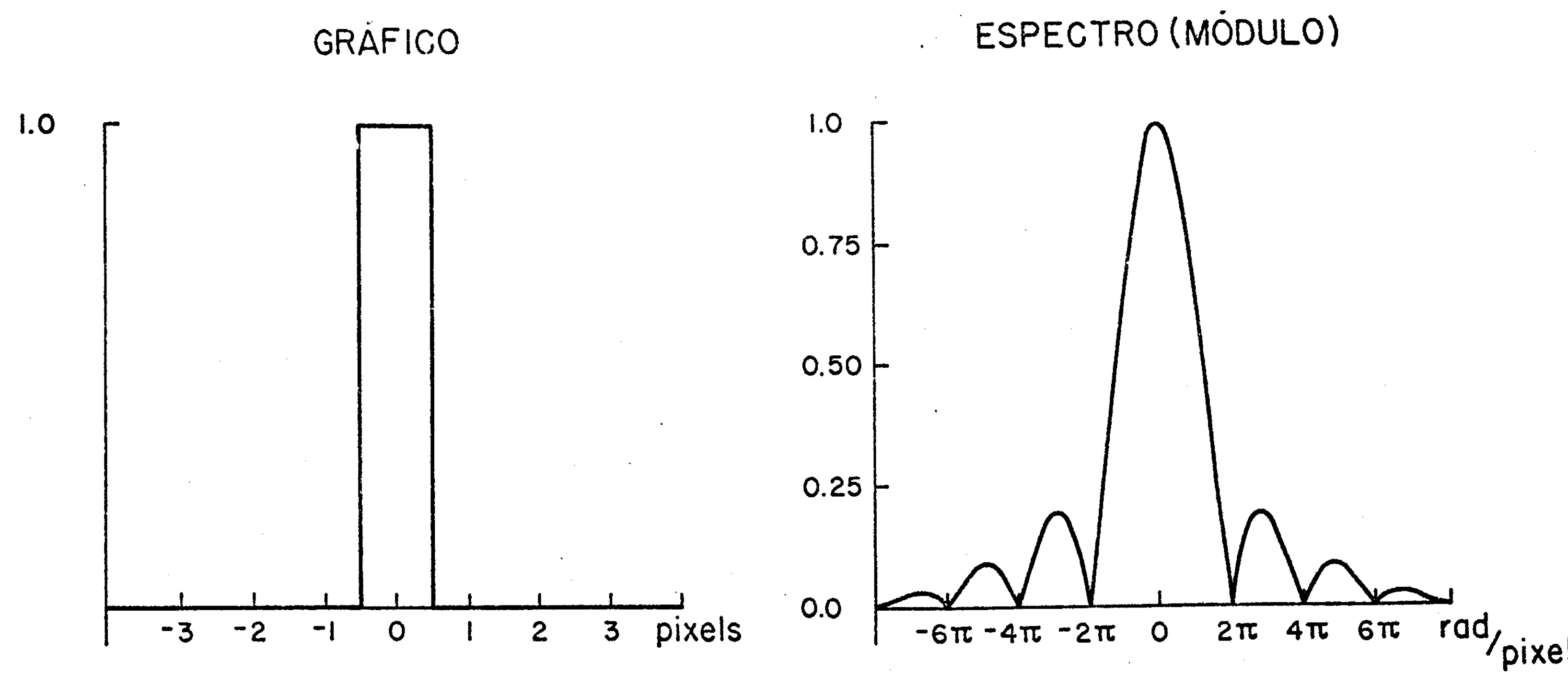


Fig. 3.2 - Interpolador vizinho-mais-próximo.

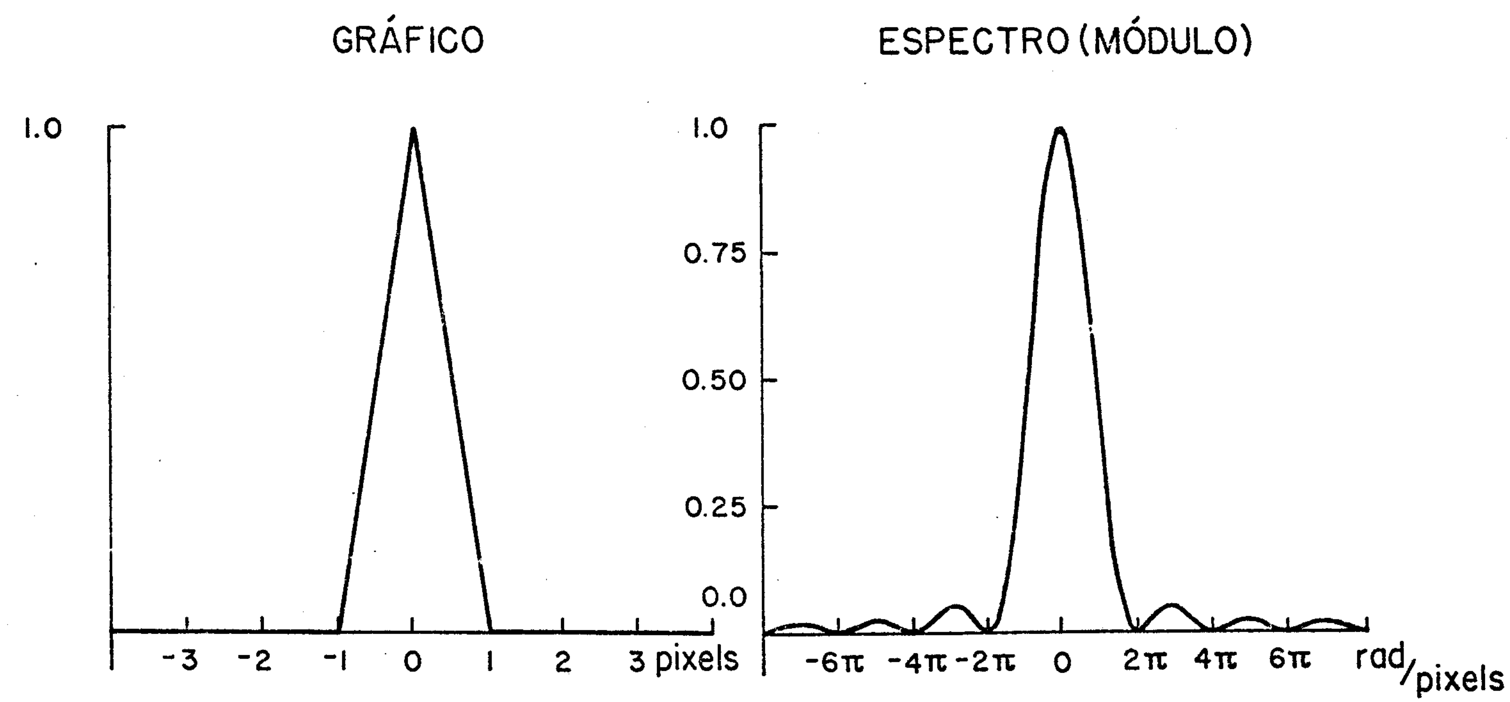


Fig. 3.3 - Interpolador bilinear.

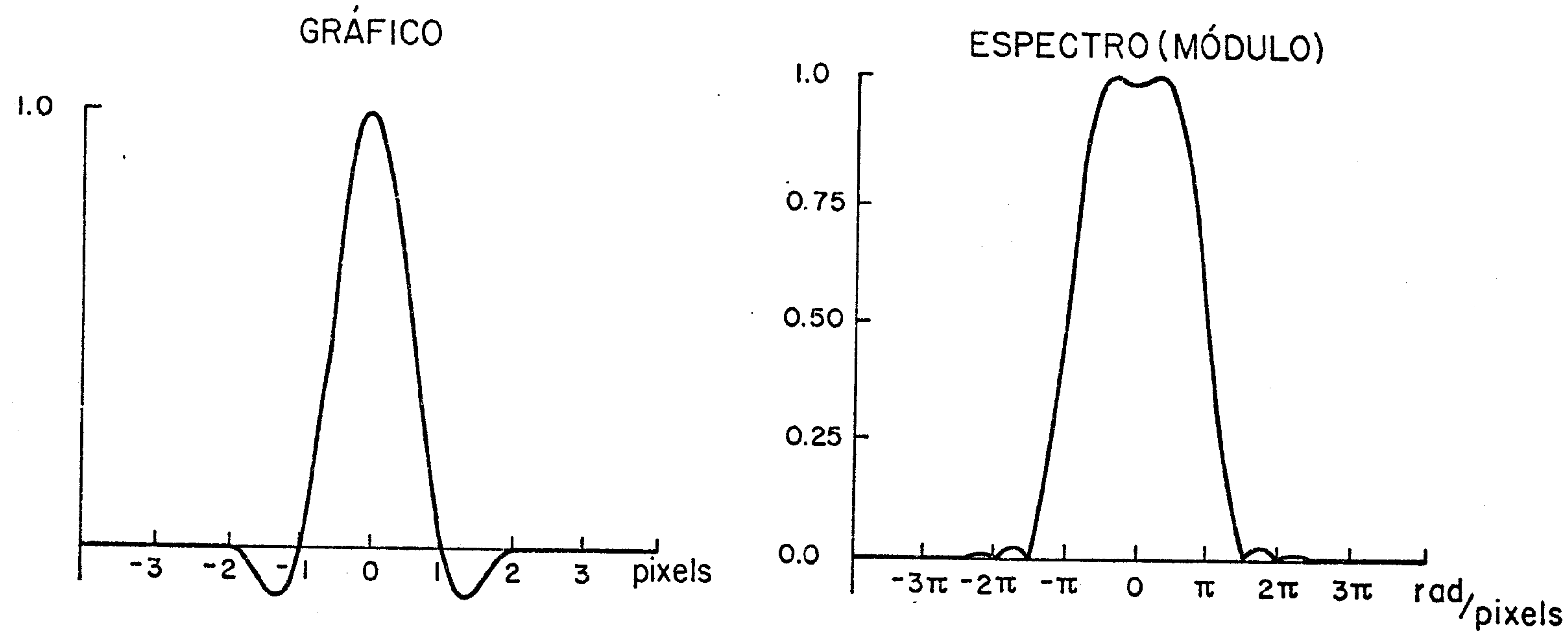


Fig. 3.4- Interpolador de Shlien.

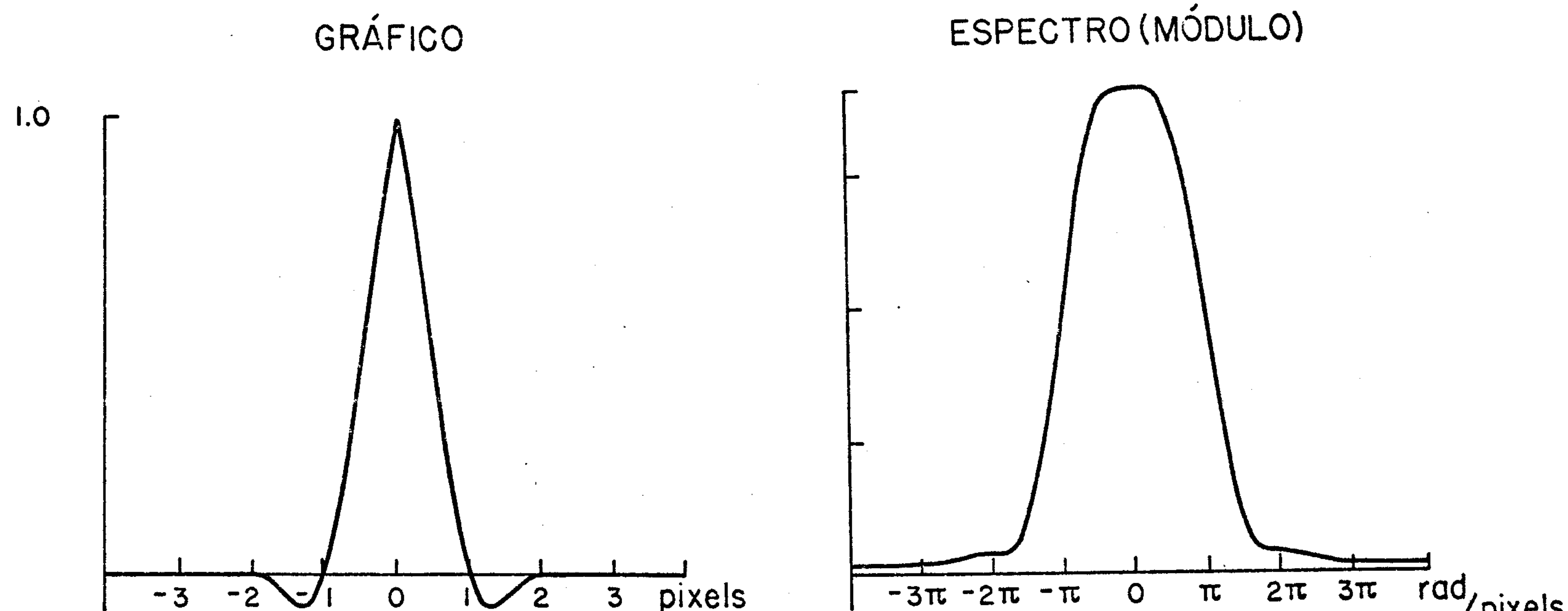


Fig. 3.5 - Interpolador de Bartlett.

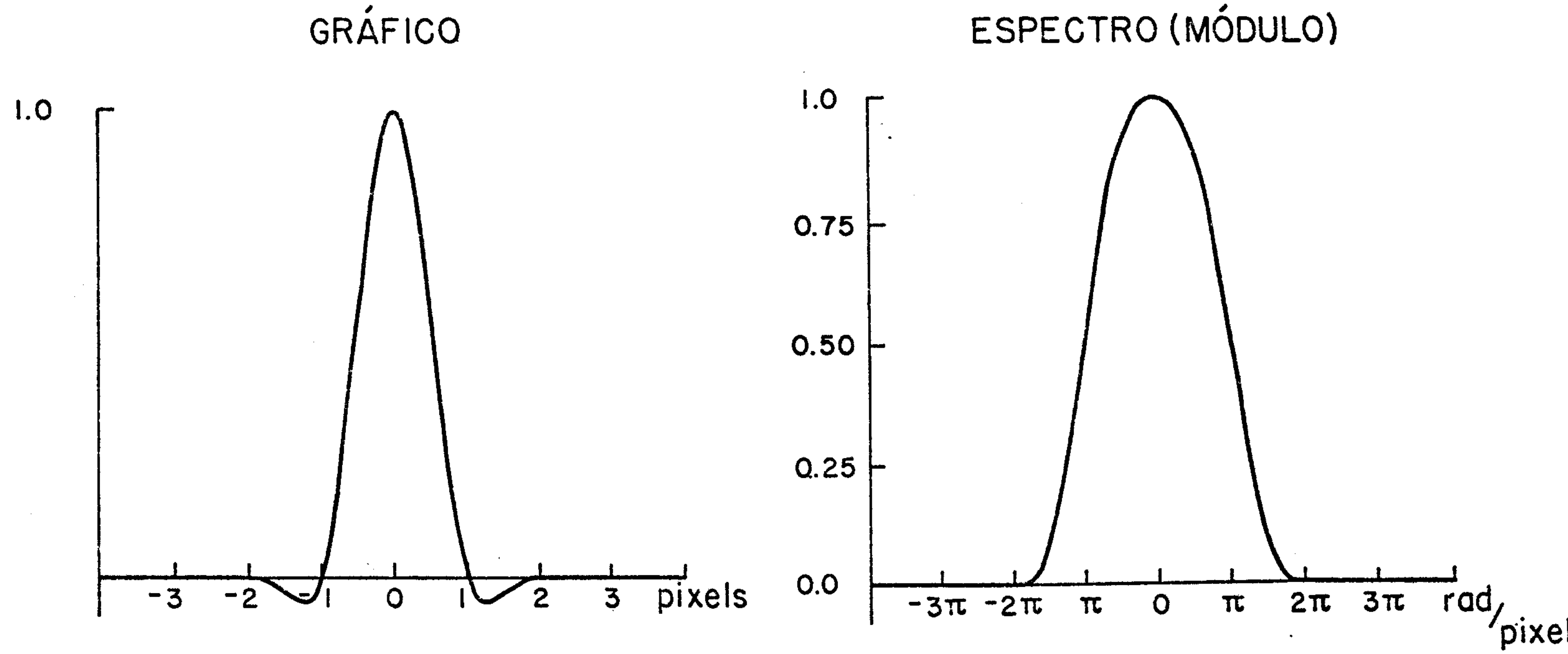


Fig. 3.6 - Interpolador de Hann.

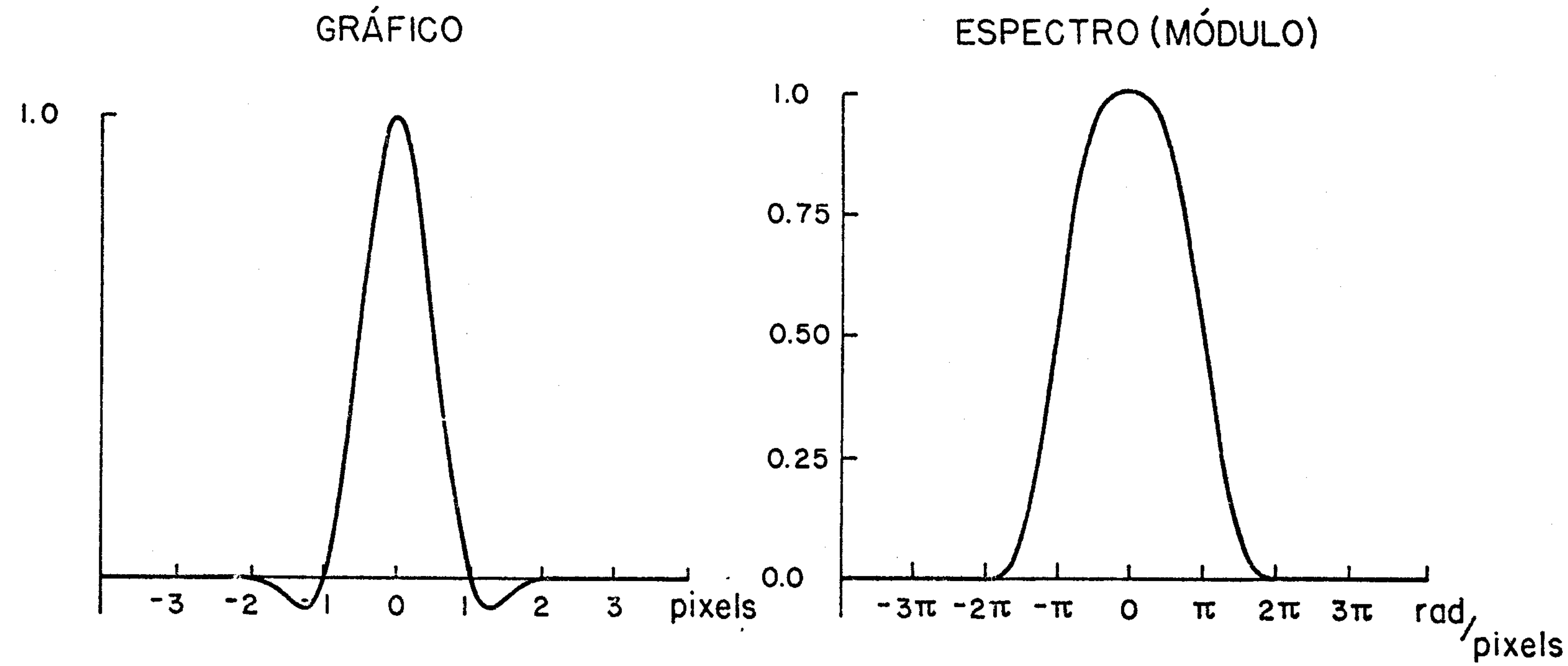


Fig. 3.7 - Interpolador de Hamming.

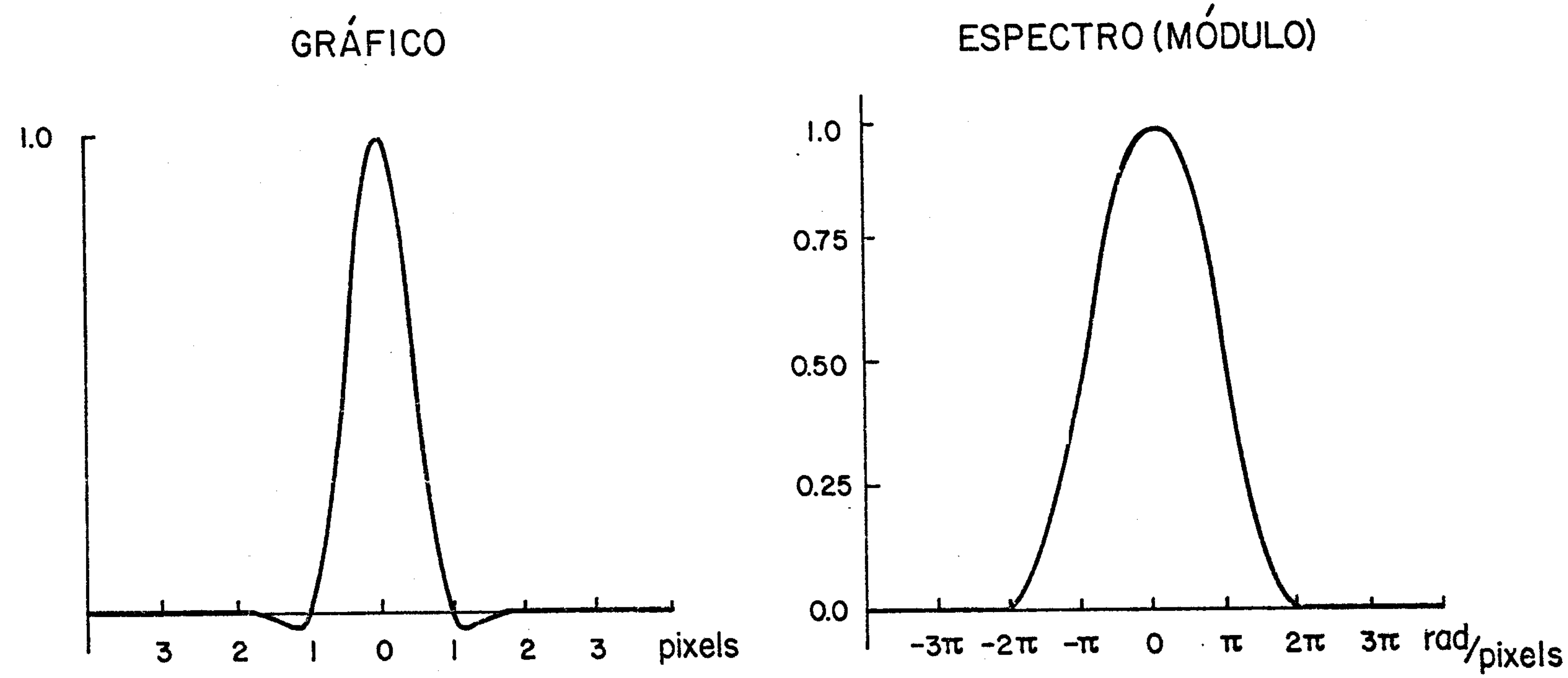


Fig. 3.8 - Interpolador de Blackman.

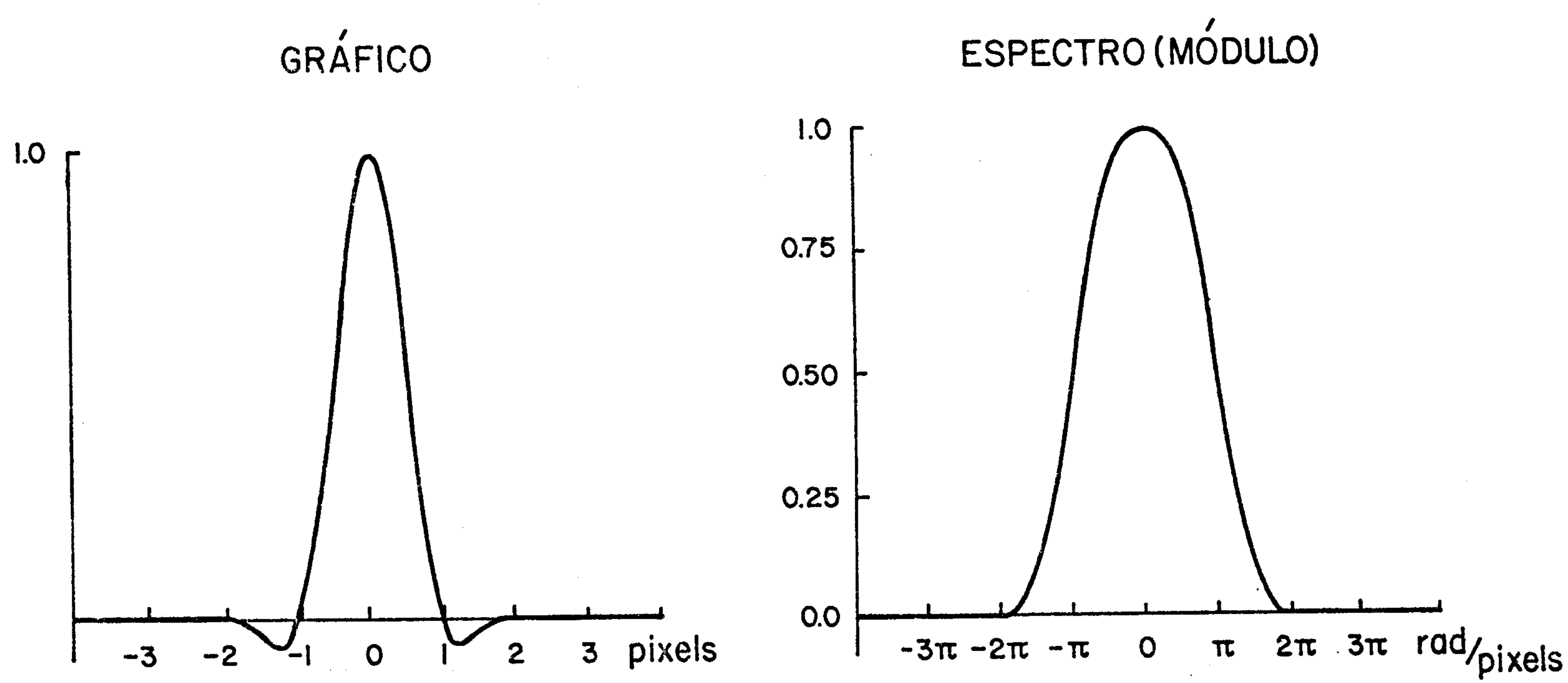


Fig. 3.9 - Interpolador de Kaiser.

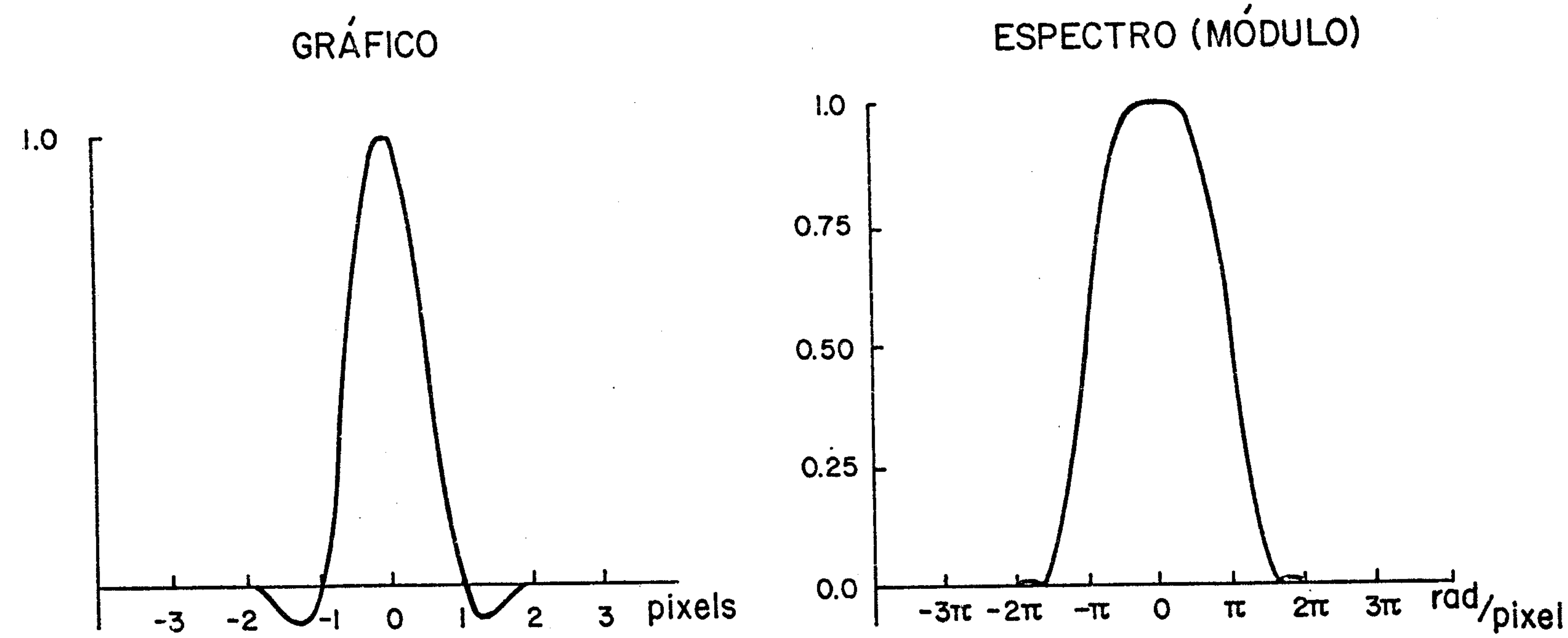


Fig. 3.10 - Interpolador Sinc.

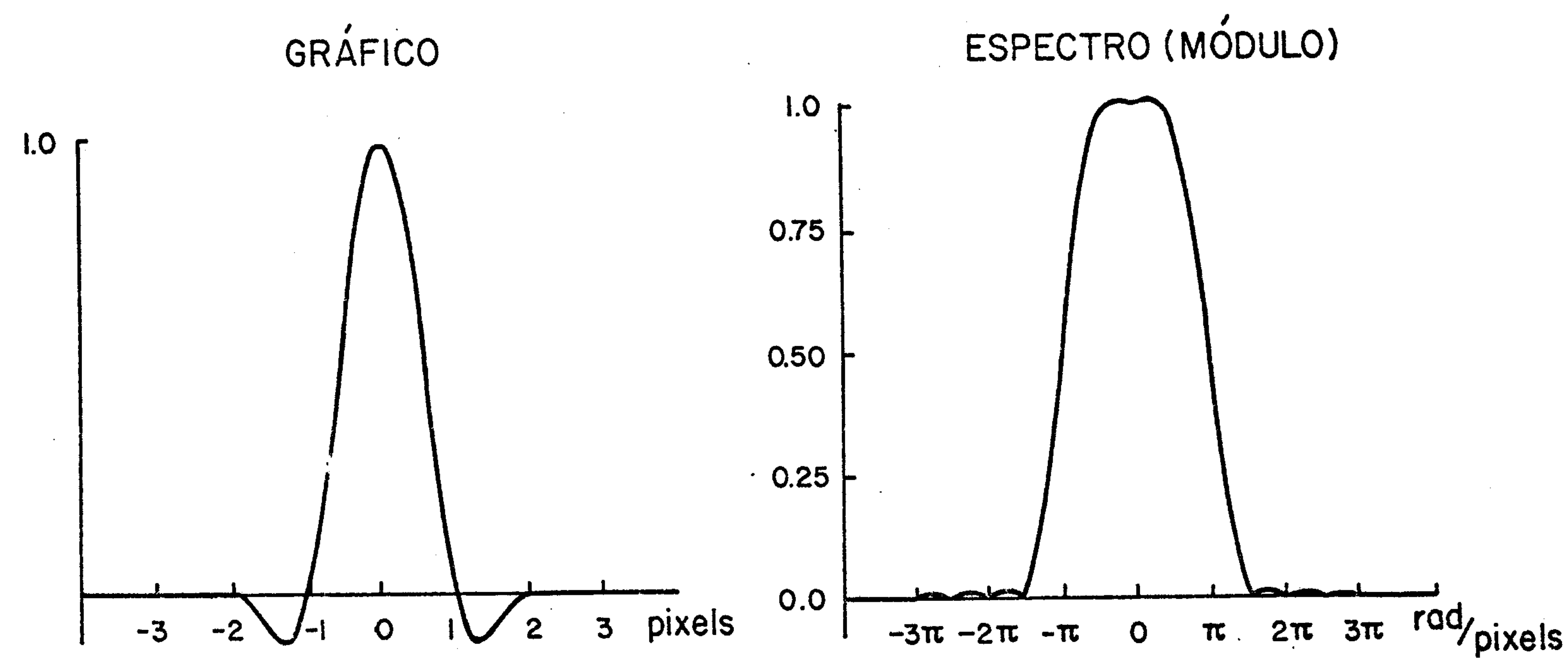


Fig. 3.11 - Interpolador cossenoidal.

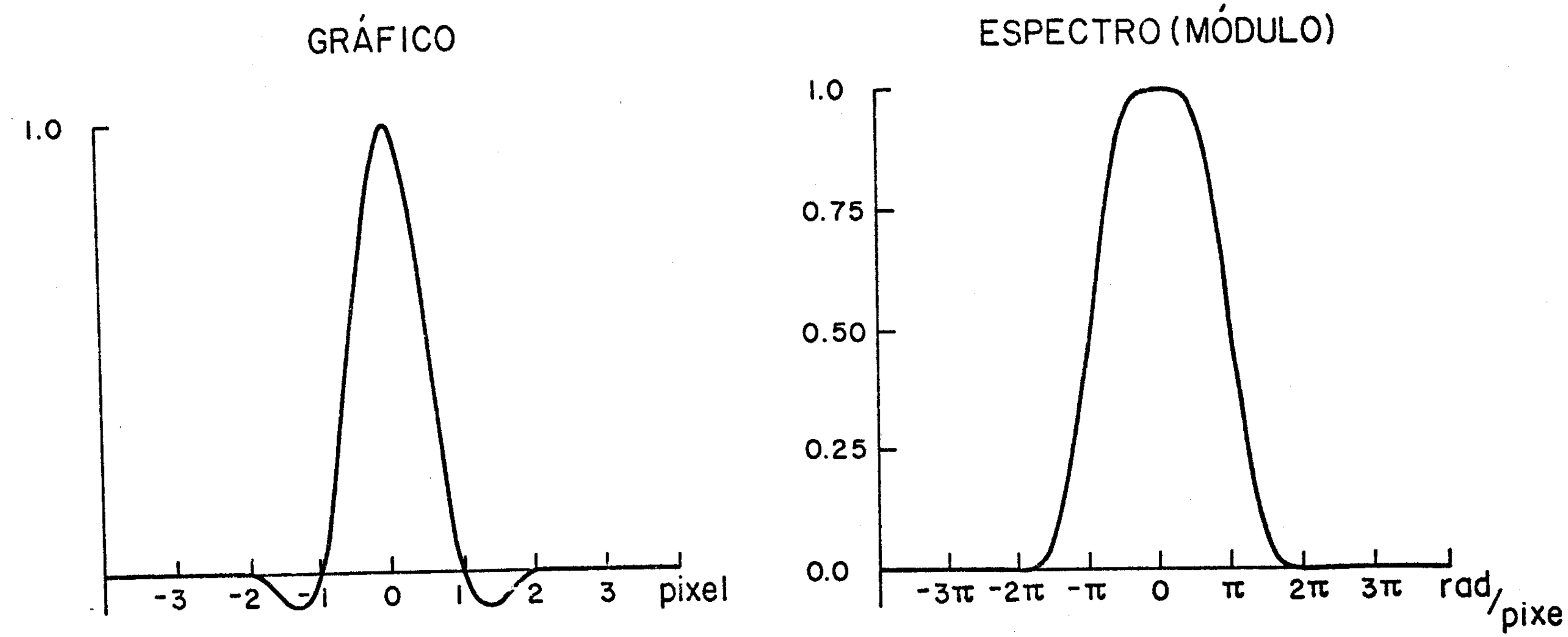


Fig. 3.12 - Interpolador convolução cūbica.

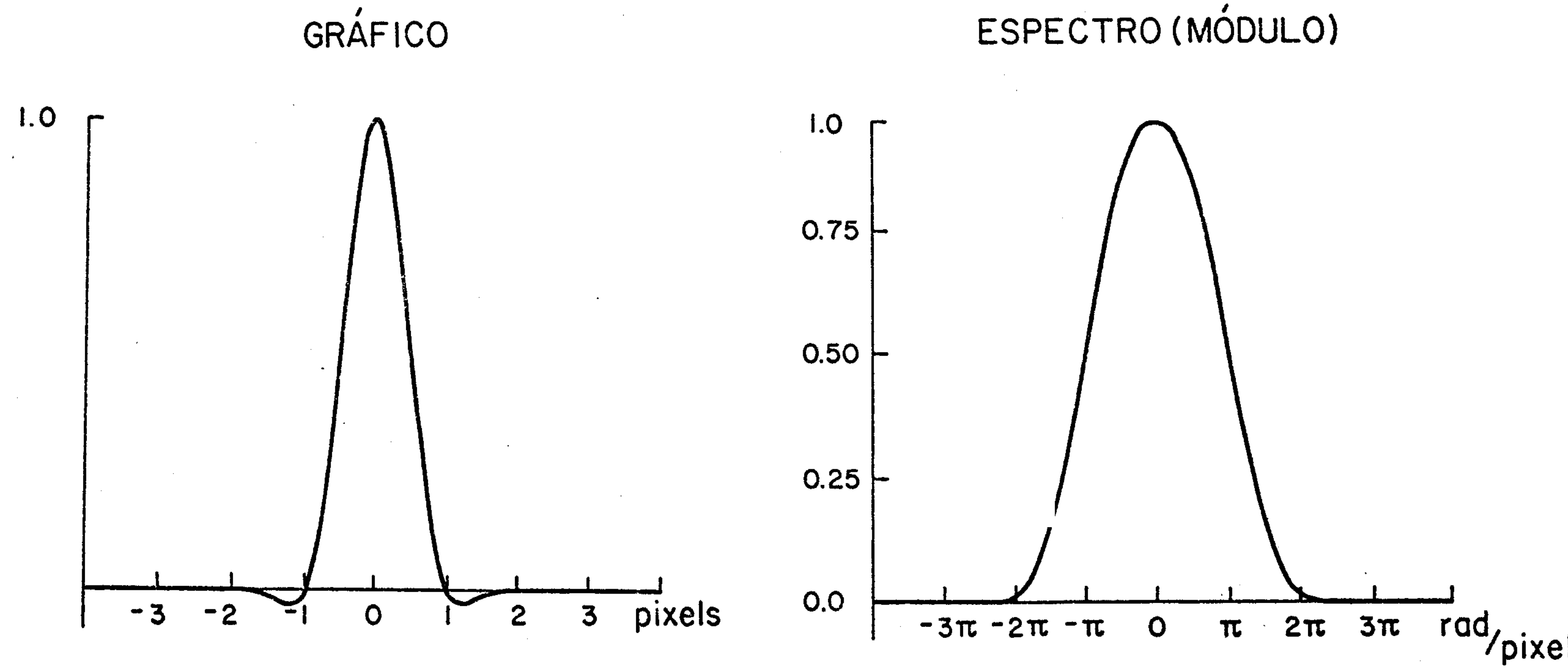


Fig. 3.13 - Interpolador de Papoulis.

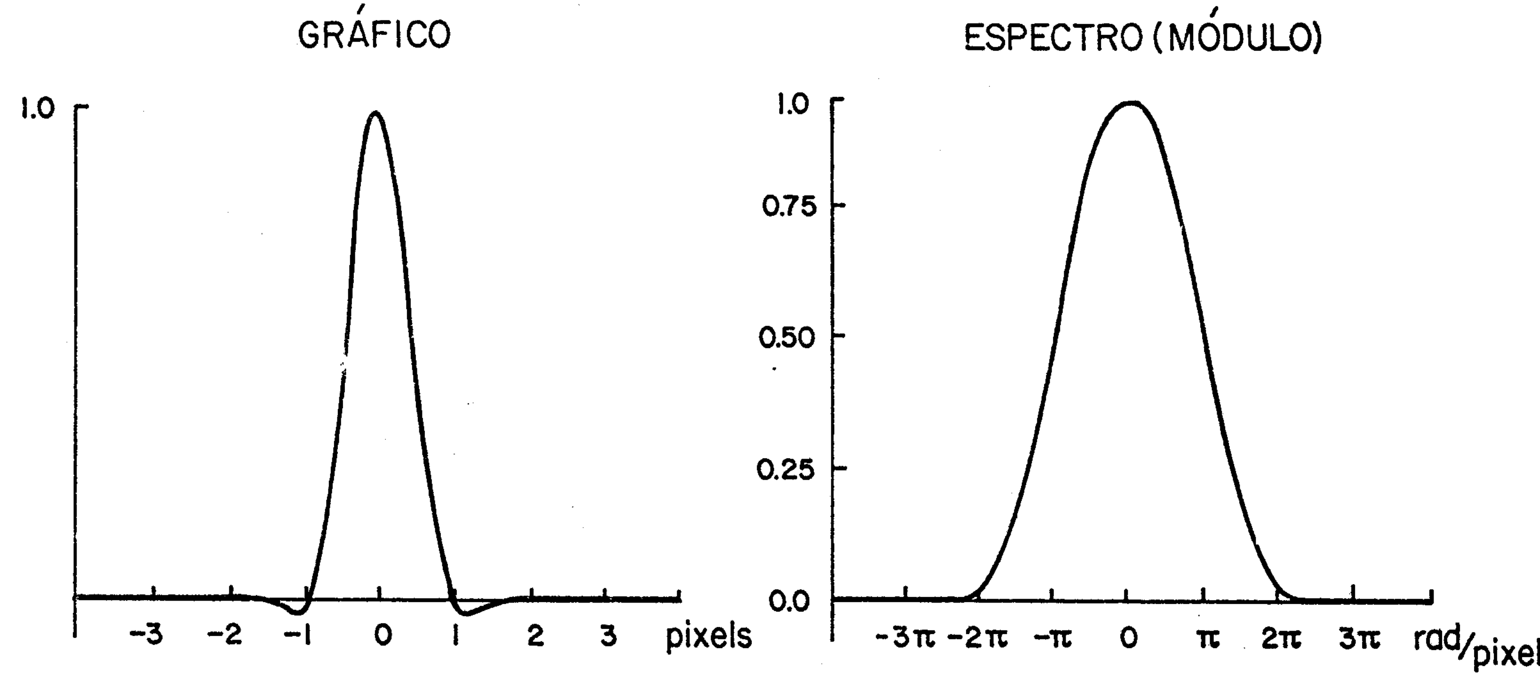


Fig. 3.14 - Interpolador de Parzen.

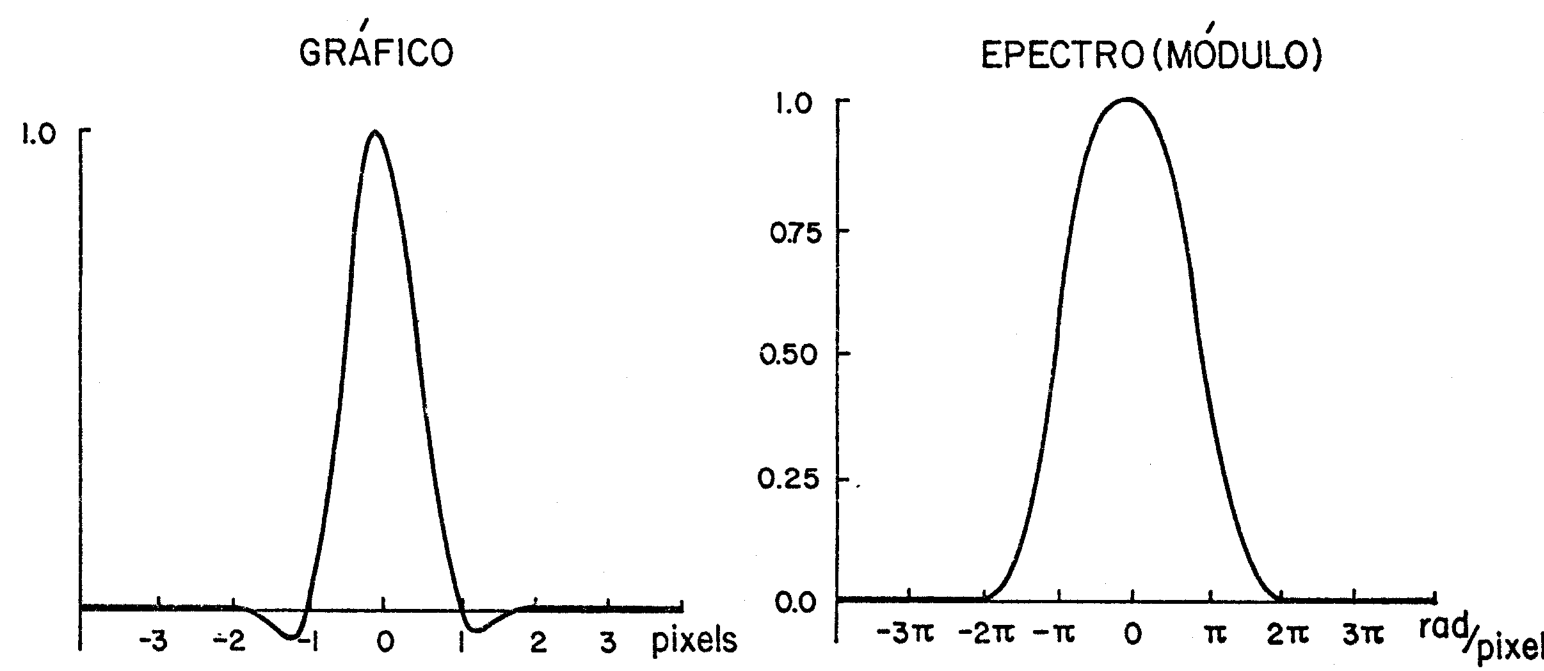


Fig. 3.15 - Interpolador de Kaiser modificado.

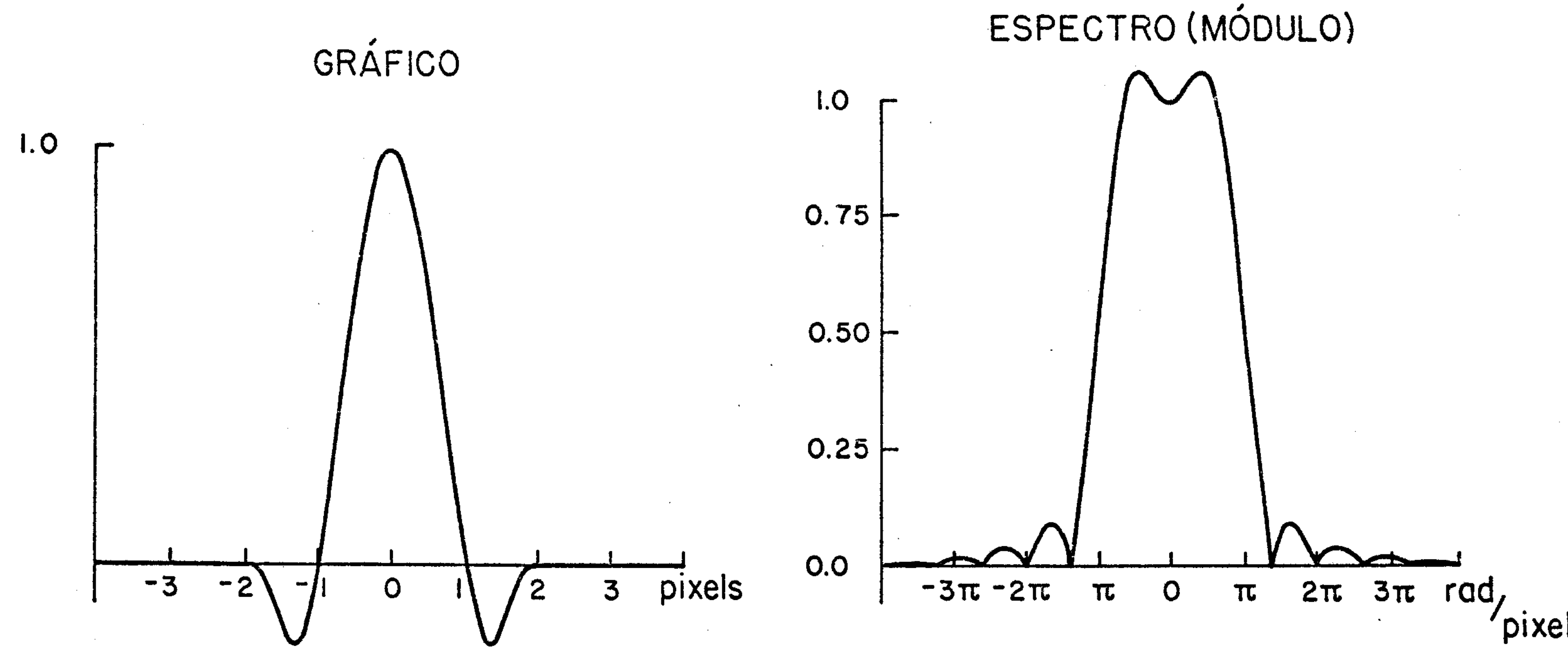


Fig. 3.16 - Interpolador de Tukey.

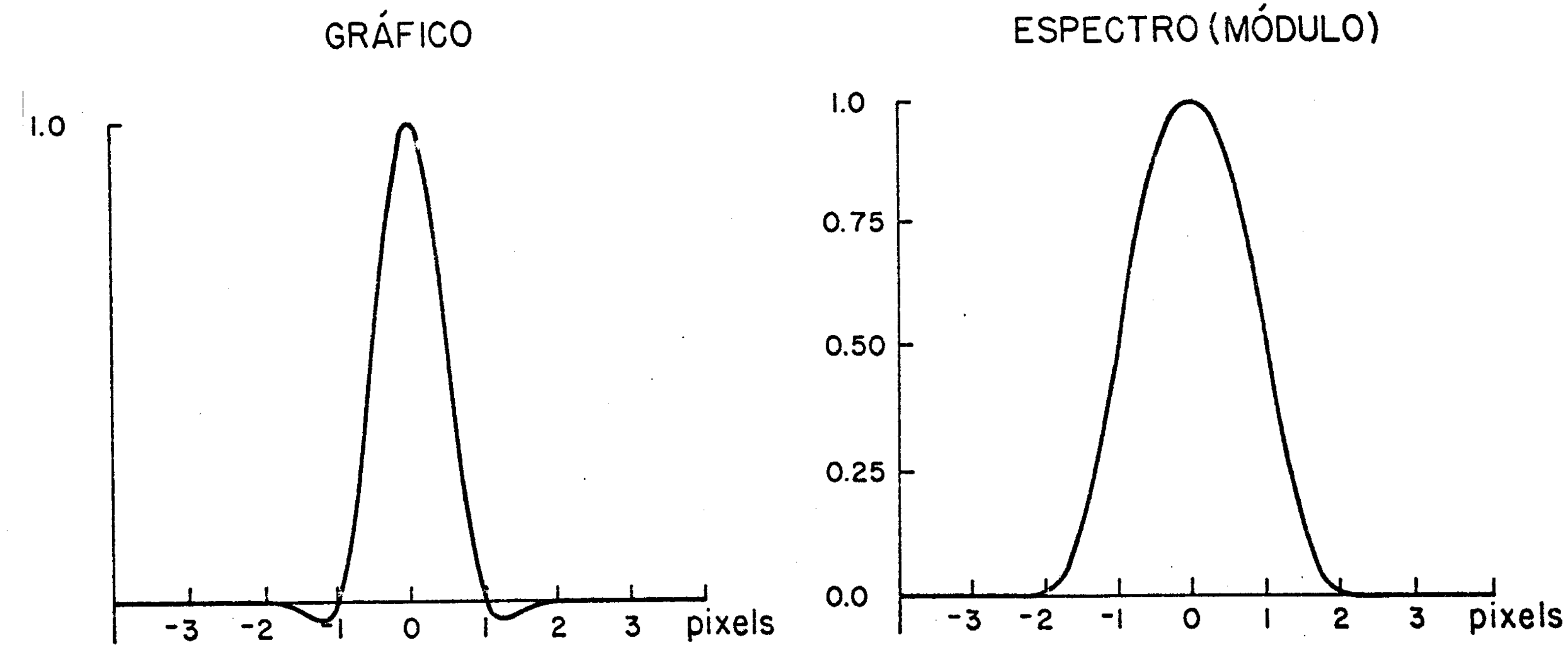


Fig. 3.17 - Interpolador de 3-coeficientes.

A matriz amostral $S(x, y)$ é composta de $(2N_1 + 1)\ (2N_2 + 1)$ pulsos $P(x, y)$, distribuídos uniformemente, com espaçamento Δx, Δy. O resultado é uma imagem com a mesma dimensão de grade.

Para a análise do processo de interpolação, é importante considerar as diferenças entre os processos de reconstrução da imagem ideal. Se as condições de Nyquist fossem satisfeitas, a imagem ideal $F_I(x, y)$ poderia ser reconstruída por meio do interpolador ideal $\tilde{I}(x, y)$, como se segue:

$$F_I(x, y) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} F_p(j_1 \Delta x, j_2 \Delta y)\ \tilde{I}(x - j_1 \Delta x, j - j_2 \Delta y). \qquad (3.29)$$

No caso de interpoladores finitos, denotados por $I(x, y)$, a imagem reconstruída será obtida a partir da equação:

$$\hat{F}_R(x, y) = \sum_{j_1=-N_1}^{N_1} \sum_{j_2=-N_2}^{N_2} F_p(j_1 \Delta x, j_2 \Delta y)\ I(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y). \qquad (3.30)$$

No que se segue, os interpoladores são funções separáveis, ou seja:

$$I(x, y) = I(x) \cdot I(y). \qquad (3.31)$$

(Esta formulação facilita a análise do processo de interpolação; além disso, os interpoladores desenvolvidos na seção anterior podem ser diretamente aplicados à análise do processo).

O erro introduzido possui duas componentes: a função finita de interpolação $I(x, y)$ pode defirir do interpolador ideal $\tilde{I}(x, y)$, e o interpolador tem tamanho finito, o que causa erros de truncamento. Deste modo, a utilização de funções de interpolação não-ideais dá origem a uma *perda na resolução* da imagem e à *introdução de altas frequências* na imagem interpolada.

Com base nestas considerações, Pratt (1978) propôs as seguintes medidas para avaliar o desempenho de interpoladores:

a) a *perda de resolução*, devido ao uso de funções de interpolação não-ideais I(x, y), expressa por:

$$\varepsilon_R = \frac{E_I - E_R}{E_I} \tag{3.32}$$

onde:

$$E_R = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_I(\omega_x, \omega_y) \; |I(\omega_x, \omega_y)|^2 \; d\omega_x \; d\omega_y \tag{3.33}$$

representa a energia da imagem realmente interpolada, e

$$E_I = \int_{\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{\pi} W_I(\omega_x, \omega_y) \; d\omega_x \; d\omega_y, \tag{3.34}$$

a energia da imagem idealmente interpolada. Em ambos os casos, $W_I(\omega_x, \omega_y)$ denota a *densidade espectral de potência* de imagem ideal.

b) o *erro de interpolação*, resultante da introdução de alta frequência, pode ser definido como:

$$\varepsilon_A = \frac{E_A}{E_T}, \tag{3.35}$$

onde:

$$E_T = \iint_{-\infty}^{\infty} W_I(\omega_x, \omega_y) \; |R(\omega_x, \omega_y)|^2 \; d\omega_x \; d\omega_y \tag{3.36}$$

indica a energia total de imagem interpolada, e

$$E_A = E_T - E_R, \tag{3.37}$$

representa a parcela da energia da imagem interpolada fora dos limites de Nyquist.

As Tabelas 3.1 e 3.2 contêm listas dos parâmetros ε_R e ε_I para os interpoladores definidos previamente. Para a geração da Tabela 3.1, foi considerada uma densidade espectral de potência, $W_I(\omega_x, \omega_y)$ de forma:

$$W_I(\omega_x, \omega_y) = W_I^2(\omega), \tag{3.38}$$

onde:

$$\begin{cases} W_I(\omega) = \sqrt{\pi^2 - \omega^2}, & |\omega| \leq \pi \\ W_I(\omega) = 0, \text{ fora.} \end{cases} \tag{3.39}$$

A Tabela 3.2 foi obtida com vase numa função de autocorrelação do tipo *markoviana separável*, da forma:

$$\mathbf{R}_I(j, k) = \mathbf{R}_I^2(j) \tag{3.40}$$

onde:

$$\mathbf{R}_I(j) = .953^j. \tag{3.41}$$

A densidade espectral de potência é obtida - nesse caso - a partir da transformada de Fourier de função de autocorrelação. A Transformada de Fourier que fornece a densidade espectral de potência $W(\omega_w, \omega_y)$ é obtida, a partir de autocorrelação $R(j, k)$ por:

$$W(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N+1} \sum_{K=0}^{N-1} R(j,x) \exp\left\{-2\pi i \left[\frac{j\,x + k\,y}{N}\right]\right\}. \tag{3.42}$$

As Tabelas 3.1 e 3.2 são forte evidência de um comportamento semelhante entre os vários interpoladores, principalmente no caso de uma autocorrelação markoviana; os interpoladores de *Shlien* e *cossenoidal* apresentam melhor comportamento que os demais.

TABELA 3.1

ERROS DE INTERPOLADORES

(densidade espectral de potência $W_I = \sqrt{\pi^2 - \omega^2}$)

	PERDA DE RESOLUÇÃO $\varepsilon_R(\%)$	ERRO DE INTERPOLAÇÃO $\varepsilon_I(\%)$
VIZINHO-MAIS-PRÓX.	32,1	25,6
BILINEAR	49,0	6,1
SHLIEN	23,8	3,9
BARTLETT	26,3	7,2
HANN	35,6	6,6
HAMMING	31,4	5,9
BLACKMAN	38,0	9,1
KAISER	34,1	6,7
SINC	27,7	4,9
COSSENOIDAL	24,6	4,3
CONVOLUÇÃO CÚBICA	28,1	5,1
PAPOULIS	38,6	9,7
PARZEN	38,8	11,2
KAISER MODIFICADA	34,9	6,9
TUKEY	24,6	3,6
3 - COEFICIENTES	37,4	8,4

TABELA 3.2

ERROS DE INTERPOLADORES

(auto correlação markoviana = $0{,}953^{i}$)

	PERDA DE RESOLUÇÃO $\varepsilon_R(\%)$	ERRO DE INTERPOLAÇÃO $\varepsilon_I(\%)$
VIZINHO-MAIS-PRÓX.	13,9	10,7
BILINEAR	22,0	2,1
SHLIEN	12,4	1,7
BARTLETT	10,8	3,2
HANN	15,2	2,5
HAMMING	13,2	2,3
BLACKMAN	16,5	3,4
KAISER	14,5	2,5
SINC	11,3	2,0
COSSENOIDAL	11,1	1,8
CONVOLUÇÃO CÚBICA	11,5	2,0
PAPOULIS	16,8	3,6
PARZEN	16,9	4,3
KAISER MODIFICADA	14,9	2,6
TUKEY	22,2	1,8
3-COEFICIENTES	16,2	3,1

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES: AMPLICAÇÃO DE ESCALA E REAMOSTRAGEM

Para permitir a comparação entre os resultados de aplicação dos interpoladores, descritos anteriormente, ao problema de ampliação de escala, uma imagem padrão - a "Garota da Kodak" - foi analisada pelos equipamentos do Laboratório de Tratamento de Imagens Digitais do INPE (LTID).

A imagem padrão foi reduzida do 8 (oito) vezes do tamanho original de 512 x 512 para as dimensões de 64 x 64. A redução foi feita por partes, tomando-se sucessivamente a média em regiões de tamanho 2 x 2; a seguir, as imagens foram ampliadas de acordo com os interpoladores discutidos anteriormente. A Tabela 4.1 apresenta os parâmetros do *erro* (média e variância) e do *módulo do erro* média e variância em percentagem da imagem original). A média do erro indica apenas a diferença das médias entre a imagem original e a interpolada.

Mais uma vez, o desempenho revela ser bem semelhante entre os diversos tipos de interpoladores. Visualmente, as imagens geradas pelos interpoladores de Shlien, Kaiser modificada, sinc, cossseno e convolução cúbica são superiores às demais e bem parecidos entre si. Nas aplicações de correção geométrica, onde não se pode pré-computar os valores do interpolador, a função de convolução cúbica apresenta grande superioridade sobre as demais, em termos de tempo de computação. No caso de reamostragem ou ampliação de escala, o tempo de computação é igual para todos os interpoladores, pois os verores são pré-computados, já que são conhecidos os valores que estas poderão assumir.

TABELA 4.1

DESEMPENHO DOS INTERPOLADORES PARA AMPLIAÇÃO DE ESCALA

INTERPOLADOR	ERRO		MÓDULO (%)	
	méd.	var.	méd.	var.
VIZ. MAIS PRÓX.	0,20	181	10,6	7,0
BILINEAR	0,80	154	11,2	5,4
HANN	1.40	165	13,1	6,3
HANNING	0,10	164	9,8	5,4
BARTLETT	-13,8	234	22,3	12,2
BLACKAMAN	3,7	160	11,3	6,0
KAISER	- 0,5	165	9,9	5,4
SINC	1,0	145	9,9	5,3
COSSENOIDAL	0,7	145	9,9	5,3
CONVOLUÇÃO CÚBICA	- 0,4	144	9,8	5,3
PAPOULIS	- 5,6	167	12,7	6.8
PARKEN	7,8	193	15,4	8,1
KAISER MODIFICADA	- 0,2	146	9,8	5,4
TUKEY	- 0,6	153	9,8	5,4
3-COEFICIENTES	- 2,5	153	10,5	5,7
SHLIEN	- 0,4	145	9,9	5,3

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

O problema de interpolação foi estudado do ponto de vista da teoria de Processamento Digital de Sinais; neste âmbito, foram projetados filtros FIR (resposta ao repulso finita) para interpolação. A abordagem escolhida foi o método mais direto disponível para o projeto de tais filtros: o uso de *janelas*.

Entre as vantagens do método de janelas está a sua simplicidade, além do fato de os filtros obtidos poderem ser expressos analiticamente; esta última propriedade é de fundamental importância nos processos de correção geométrica de imagens. Entre as desvantagens, é importante notar que os filtros resultantes são subótimos, no sentido de que podem ser projetados - por outros métodos-para um mesmo número de coeficientes, filtros FIR digitais que melhor aproximem a resposta em frequência desejada.

Além disso, no caso específico de imagens, foi verificada a existência de um comportamento semelhante para vários dos interpoladores estudados; uma hipótese para explicar tal fato é a de que uma imagem não se reduz à sua transformada de Fourier, ou seja, existem características de informação em uma imagem que não são facilmente expressas em termos de sua resposta em frequência.

Com base nos resultados e nas conclusões acima expostos, dois caminhos adicionais podem ser propostos dentro do contexto deste trabalho: o projeto de filtros para interpolação por meio do técnicas de filtragem ótima, e a combinação de informações texturais de imagem (enfoque de teoria de Inteligência Artificial) com as características de frequência de imagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERNSTEIN, R. Digital image processing of earth observation sensor data. *IBM Journal of Research & Development*, 20(1):40-57, Jan. 1976.

BLACKMAN, R.B.; TUKEY, J.W. *The measurement of power spectra*. New York, Dover, 1958.

CAPELINI, V.; CONSTANTINIDES, A.G.; EMILIANI, P. *Digital filters and their application*. London, Academic, 1978.

CROCHIERE, R.; RABINER, L.R. Interpolation and decimation of digital signals - a tutorial review. *Procedings of the IEEE*, 69(3):300-331, Mar. 1981.

GECKINLI, N.C.; YAVUZ, D. Some novel windows and a concise tutorial comparison of window families. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 26(6):501-7, Dec. 1978.

MENDES, C.L.; MASCARENHAS, N.D.A.; SOUZA, R.C.M. *Métodos de interpolação para imagens multiespectrais*. São José dos Campos, INPE. No prelo.

PAPOULIS, A. *Signal analusis*. New York, McGraw Hill, 1977.

PRATT, W.K. *Digital image processing*. New York, John Wiley, 1978.

RABINER, L.R.; GOLD, B. *Theory and application of digital signal processing*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1975.

SCHAFER, R.W.; RABINER, L.R. A digital signal processing approach to interpolation. *Proceedings of the IEEE*, 61(6):692-702, June 1973.

SHLIEN, S. Geometric correction, registration and resampling of LANDSAT imagery. *Canadian Journal of Remote Sensing*, 5(1):74-89, May 1979.